AGB
P. 29

+1 Beil.

P 29

K. B. GYMNAS: BIBLIOTHEK
BAMBERG

Lehrbuch
der
reinen niedern Geometrie
in Verbindung
mit der Anleitung
zur
Feldmeßkunst

von

Johann Schön

der Philosophie Doktor, öffentlichem und ordentlichem Professor der Physik und Mathematik an dem Großherzoglichen Gymnasium, und Privatlehrer der Mathematik an der Julius-Universität zu Würzburg.

P29

K. B. GYMN. BIBLIOTHEK BAMBERG

Mit XIX. Kupfertafeln.

Nürnberg,
bei Karl Felßecker.
1808.

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Vorrede.

Das vorliegende Lehrbuch der Geometrie macht mit den früher von mir herausgegebenen Schriften, der Ziffernrechnung, der Buchstabenrechnung und niedern Algebra, dann der ebenen und sphärischen Trigonometrie ein Ganzes aus. Die Ursache, warum diese vier Lehrbücher nicht vielmehr in einigen Bänden vereinigt erschienen sind, liegt größtheils darin, daß die Bestimmung des Verfaßers, nachdem er sechs Jahre hindurch an den zwey philosophischen Klassen des hiesigen Gymnasiums Philosophie, Mathematik und Physik vorgetragen, und zugleich ein Jahr lang die außerordentliche Professur der Mathematik an der

Universität begleitet hatte, in dem kurzen Zeitraume der folgenden vier Jahre nicht weniger, als dreymal wechselte. Daher kam es, daß ich bey meinen literarischen Arbeiten, wodurch ich auf meinem jedesmaligen Lehrposten so viel zu nützen bestrebt war, als Zeit und Kraft mir es gestatteten, immer die nächsten Bedürfniße meiner Zuhörer berücksichtigen mußte.

Bey der Ausarbeitung des gegenwärtigen Lehrbuches hatte ich die Erreichung folgender Zwecke vor Augen:

Erstens sollte in Hinsicht auf reine Geometrie diese Schrift diejenige Vollständigkeit haben, welche die Natur und der nothwendige Zusammenhang der abzuhandelnden Gegenstände, um ein in sich begründetes und geschlossenes Ganzes auszumachen, und dann der Umstand erfordert, daß man die Geometrie auf Geodäsie, Trigonometrie, die Theorie der Kegelschnitte und besonders auf Physik so muß anwenden können, daß man nicht nöthig hat, in den

letztern Wissenschaften Sätze mit ihren Beweisen, welche zur niedern Geometrie gehören, eigends aufzuführen. Die letztere Art von Vollständigkeit, welche man die relative nennen könnte, mußte von mir um so mehr beabsichtigt werden, da die Vorträge der genannten Wissenschaften ebenfalls zur Sphäre meines öffentlichen Lehramtes gehören.

Zweytens sollte meine Schrift eine genauere Anleitung zur Geodäsie, als man in Lehrbüchern der reinen Geometrie findet, enthalten. In dieser Hinsicht wählte ich den Mittelweg zwischen zuviel und zuwenig. Durch meine Bemühungen sollten die ausführlichen Schriften über Geodäsie überhaupt, oder über einzelne Gegenstände derselben nicht überflüßig gemacht, sondern nur die nothwendigsten Kenntniße der prakischen Geometrie, nach dem Grade ihrer gegenwärtigen Vollkommenheit, deutlich dargestellt werden. In der Art, diese praktischen Kenntnisse mit den Sätzen der reinen Geometrie zu verbinden, folgte ich meinem unvergeßlichen Lehrer, Trentel, welcher die Methode seines Vorgängers Huberti verlassend, jedesmal an dem Orte die Praxis berücksichtigte, wo ihre Begründung

dung statt gefunden hatte. Die Erfahrung hat mich überzeugt, daß diese Art, das Wichtigste über Feldmeßkunst mit der reinen Theorie zu verbinden, für den Schüler von größtem Nutzen ist. Denn indem er das, was ihn die letztere lehrte, sogleich auf wirklich existirende Gegenstände anwendet, erhält er nicht nur eine Wiederholung und nicht selten eine Verdeutlichung der reinen Theorie, sondern auch die Ueberzeugung, daß er sich nicht etwa mit phantastischen Objekten der Einbildungskraft, vielmehr mit solchen Objekten und ihren Gesetzen beschäftige, deren Nachbild gleichsam die ausgedehnten Größen der erscheinenden Natur sind, durch deren Gesetze er folglich auch die letzteren, wenigstens sehr nahe, bestimmen kann. Das Unangenehme, welches für den, der sich über Geodäsie im Zusammenhange zu unterrichten wünscht, aus dieser Einrichtung entspringt, habe ich durch das Inhaltsverzeichniß zu beseitigen gesucht. Mit Hilfe desselben vermag er das über Feldmeßkunst im Buche zerstreut vorgetragene in seiner natürlichen Aufeinanderfolge zu übersehen, und jede einzelne Materie nach Wunsch aufzufinden.

Was

Was aber die Weise betrifft, wie ich die Sätze der reinen Geometrie aneinander reihte, glaube ich, die natürlichste Ordnung befolgt zu haben, diejenige nämlich, welche nicht lediglich durch das streng-wissenschaftliche System, sondern zugleich auch durch die Deutlichkeit bedingt und vorgeschrieben wird. Die Inhaltsanzeige über diesen Theil meines Lehrbuchs wird dem Anfänger, nachdem er das Gebiet der niedern Geometrie mit seinem Lehrer nicht ohne Frucht und Freude durchwandert hat, den Nutzen gewähren, daß er nun jenes Feld ganz und leicht überschaut, das Gleichartige systematisch ordnet, und sich selbst prüfen kann, ob er nicht nur die in jener Anzeige angedeuteten Sätze aussprechen, sondern sie auch außer dem Zusammenhange, in welchem sie im Buche vorgetragen wurden, zu beweisen, und diese Beweise bis auf die einfachen Elemente der Geometrie fortzusetzen im Stande sey.

Drittens war ich, wie bey meiner Buchstabenrechnung und Algebra, so auch bey Verfertigung dieser Schrift besonders bemüht, die Erfindungs- und Urtheilskraft meiner Zuhörer zu üben. Dieses Zwe-

ckes

ckes wegen gab ich dem Buche eine solche Einrichtung, daß 1) dem mündlichen Vortrage noch mehrers bey- zusetzen und zu erläutern übrig bliebe; 2) daß auch die sokratische Methode, welche im Ganzen bey öffent- lichen Vorlesungen nicht statt finden kann, in denjeni- gen Fällen wenigstens, wo es dem Privatfleiße des Schülers nicht geglückt ist, irgend einen geforderten Beweis, oder die angedeutete Aufstellung oder An- wendung eines Satzes zu finden, angewendet werden könne. Auf diese Art ist es mir, wie ich glaube, ge- lungen, meinem Buche zugleich diejenige Kürze zu geben, welche an einem jeden eigentlichen Handbuche nicht vermißt werden darf.

Würzburg den 1ten Febr.
1808.

Der Verfasser.

Summarische Inhaltsanzeige.

Erstens aus der reinen Geometrie.

Erklärung und Eintheilung der Geometrie §§. 3. 7. S. 1—3.

Erklärung und Eintheilung der Linien §§. 5. 9.

Postulate und Axiome in Betreff der geraden Linien §§. 10. 11. S. 7.

Der unendlichvielste Theil einer endlichen Linie ist ein Punkt §. 19. S. 12.

Erklärung vom Verhältniße und der Proportion gerader Linien §. 105. S. 85.

Lehrsätze in Ansehung dieses letzten Gegenstandes §§. 106. 107. 108. 130. S. 106—8 und S. 120.

Eine gerade Linie einer andern gleich §. 22. S. 15., oder nmal größer zu machen §. 24. S. 16.; oder in gleiche §. 114. S. 93., oder proportionelle Theile §. 115., oder media et extrema ratione zu theilen §. 127. S. 118., oder durch eine senkrechte Linie zu halbiren §. 46. S. 32.

Zwi-

Zwischen 2 gegebenen geraden Linien (entweder) eine mittlere §§. 125. 126. Anm. S. 117. (oder 2 mittlere Proportionallinien §. 130. Anm. 2. S. 118.), oder zu 2 oder 3 gegebenen die 3te oder 4te Proportionallinie zu finden §. 113. S. 92.

Lehrsätze in Betreff gerader Linien, welche sich schneiden (§. 25.): 1) sie schneiden sich nur in einem Punkte §. 25. Z.* S. 17. 2) sie liegen in derselben Ebene §. 147. S. 161; 3) wenn sie sich innerhalb oder ausserhalb dem Kreise schneiden: so sind in jenem Falle die Theile der einen den der andern, und in diesem Falle die Linien selbst ihren ausserhalb dem Kreise liegenden Theilen umgekehrt proportional §. 126. S. 117.

---

1) Das Loth auf eine gerade Linie §. 29. S. 20, auf eine Ebene §§. 149. 150. 153. S. 161—63. — 2) Das Perpendikel, von einem Punkte ausserhalb einer Linie oder Ebene auf diese gefällt, ist die kürzeste Linie §. 64. Z. 2. S. 50. §. 149. Z. 1. — 3) Die senkrechte Linie auf eine von 2 parallelen Linien oder Ebenen ist auch senkrecht auf die andere §. 56. Z. 2. S. 43. §. 157. Z. 7. S. 167. — 4) Merkmale von senkrechten Linien §. 44. S. 33. §§. 84. 89. S. 69. — 5) Ein Loth auf eine gerade Linie oder Ebene zu fällen §. 48. S. 34. §. 154.

* Z. d. i. Zusatz. Zz. d. i. Zusätze.

§. 154. S. 165. — 6) Ein Loth zu errichten §. 47. S. 33. §. 60. S. 48. §. 88. S. 73.

Erklärung der Parallellinien §. 51. S. 37., parallelen Ebenen §. 157. S. 167. einer parallelen Linie mit einer Ebene §. 149. S. 162. — Merkmale 1) der Parallellinien §. 52. mit Z. §. 54. S. 39. §. 157. Zz. 1. 2. §. 69. Z. 2. S. 54; 2) der parallelen Ebenen §. 157. Z. 10. — Linien sowohl, als Ebenen, welche parallel sind, stehen gleichweit voneinander ab §. 65. Z. 3. S. 51. §. 157. Z. 8. — Parallellinien zu ziehen §. 53. S. 38.

Erklärung und Eintheilung der Winkel §§. 26. 29. 30. 31. S. 17—21. — Des Winkels Maß 1) des geradlinigen §. 26. Z. 2., 2) des Flächenwinkels §. 156. Z. 1. S. 166. Ueber den körperlichen Winkel s. §. 160. mit Zz. 1. 2. 3. S. 171. — I. Bestimmte Größe von 2 oder mehreren Winkeln α) in einerley Ebenen §. 30. Z. 2. §. 31. Z. §§. 35. 37. 39. und. Z. 2. S. 26—29. §§. 41. 56. 87. Z. 1. S. 72; β) in verschiedenen Ebenen §. 152. S. 164. vergl. mit §. 156. Z. 2. und §. 157. Z. 9. — 2) Größe der Winkel im Dreyecke §. 57. S. 45. — 3) Der innern und äussern Polygonwinkel §. 58; — ferner 4) §. 57. Z. 2. und §. 87. Zz. 2. 3. — II. Unbestimmte

Größe des Winkels a) des äußern Winkels im Dreyecke §. 57; — b) des einer größeren Seite im △ entgegenstehenden Winkels §. 61. S. 49; — c) §. 63. — d) Des Peripheriewinkels §. 87; — e) §. 90. Z. und §. 92. S. 75; f) jede 2 Winkel des △ sind < 2R §. 50. S. 36.

Einen Winkel zu halbiren §. 45. S. 32; — in gleiche Theile zu theilen §. 45. Z. mit d. Anm., — einen Winkel einem gegebenen gleich zu machen §§. 28. 43. S. 19. und 31.

A. Eintheilung der Dreyecke §. 33. S. 25. — B. Kongruenz derselben (vergl. mit §. 70. Anm.) §§. 35. 37. §. 57. Z. 3. S. 45. §. 41. und speziell der rechtwinkligen Dreyecke §. 79. Z. S. 66. — C. Gleichheit der Dreyecke §. 70. mit Z. 1. S. 56. D. zwey Seiten des △ sind gleich §. 39. S. 29; > als die dritte §. 62. S. 49; alle 3 sind gleich §. 39. Z. 2. — E. Des △ Höhe §. 65. Z. 2. S. 52; — kongruente Dreyecke haben gleiche Höhen §. 65. Z. 4; — ähnliche die Höhen den Seiten proportional §. 123. S. 113. — F. Aehnlichkeit der △△ (1. 2. 3.) §. 116. S. 102; — Zwey Dreyecke verhalten sich unter gewissen Bedingungen, wie ihre Grundlinien oder wie ihre Höhen §§. 110. 111. S. 89; — ähnliche, wie die Quadrate ihrer homologen Seiten §. 133. Z.

S.

S. 125. — G. Der Pythagorische Lehrsatz §. 79. S. 65.

H. Verwandlung eines △ 1) in ein gleiches, dessen Spitze ein gegebener Punkt seyn soll (1. 2. 3.) §. 78. S. 61; — 2) in ein gleiches Parallelogramm §. 73. S. 59; — 3) in ein gleiches Quadrat §. 131. mit Z. S. 124. — I. Ein gleichseitiges △ in und um den Kreis zu beschreiben §§. 98. 101. S. 80—82. — K. Des △ Flächenraum zu finden §. 137. nr. 3. 5. S. 133.

Eintheilung der Vierecke §. 66. S. 52; — derselben Kongruenz §. 71. S. 58. — Welche Vierecke Parallelogramme sind? §. 67. Z. 1. — Gleichheit der letztern §. 70. — Unter einer Bedingung verhalten sich dieselben wie die Quadrate der Grundlinien oder ihrer Höhen §. 133. S. 125. — Rechtecke sind in zusammengesetztem, und Quadrate in duplizirtem Verhältniße ihrer homologen Seiten §. 132. Z. — In gleichen Rechtecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen §. 130. — Ein reguläres Viereck in und um den Kreis zu beschreiben §§. 99. 101. S. 80. 82. — Den Flächenraum vierseitiger Figuren zu finden §. 137. nr. 1. 2. 4. 5. S. 133.

Erklärung und Eintheilung der Polygone §. 32. S. 25. — Merkmale ihrer Aehnlichkeit §. 109. Z. S. 88. §. 119. S. 107. — In ähnlichen Polygonen verhalten sich die Perimeter wie jede 2 gleichnamigen Seiten §. 127. S. 112; und in regulären im Kreis beschriebenen wie die Durchmesser der Kreise §. 121. Z., oder wie die Quadrate derselben, wenn die Polygone gleichviel Seiten haben §. 135. S. 127.

A. In einem Kreise zu beschreiben 1) ein reguläres Pentagon §. 128. Z. S. 119; 2) Hexagon §. 98. S. 80; 3) Dekagon §. 128; 4) Pentadekagon §. 129. (vergl. mit §. 85. IV.); 5) ein anderes von 2mal soviel Seiten §. 100. S. 80. — B) Ein reguläres Polygon um den Kreis zu beschreiben §. 101. — C) Jedes Polygon in gegebenem Verhältniße zu vermehren oder zu vermindern §. 135. Anm. — Ferner a) jedes Polygon, b) jedes reguläre Pol. in ein gleiches △ zu verwandeln §. 74. Z. S. 60. §. 104. S. 84.

Erklärung des Kreises, — der auf ihn sich beziehenden Linien und Theile, und Eintheilung desselben §. 82. S. 68. vergl. mit §§. 16. 18. 19. — Alle Kreise sind ähnlich §. 109. Z. 2. S. 89. — Sätze 1) in Ansehung der Sehnen und Bogen §§. 83. 86; 2) des Halbmessers und der Sehne §. 84; 3)

des

des Mittelpunktes und der Sehnen §. 86; 4) der Tangente und des Halbmessers §. 89; der Tangente und der ihr parallelen Sehne §. 90; 6) der Tangente und Sekante §. 126. S. 117. — Der Durchmesser halbirt den Kreis, wie die Kreislinie §. 20. — 7) Zwey Kreislinien haben unter einer Bedingung nur 2 Punkte gemein §. 21. — Es können aus demselben Punkte ausserhalb dem Kreise auf diesen nur 2 Tangenten nach §. 91. gezogen werden §. 127. Anm. 2. — 9) Der Peripheriewinkel verglichen mit dem Centriwinkel §. 87.

Die Kreislinie ist der Perimeter eines regulären Unendlichecks §. 93. Z. 2. S. 76. — Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie ist a) in allen Kreisen einerley §. 121. Z. 3. S. 112; b) = 1 : 3,14 ... §. 140. S. 140. — Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser ꝛc. §. 135. Z. 1. S. 127. — α) Die Kreisfläche ist gleich einem Dreyecke ꝛc. §. 103. Z. 1. S. 83. β) sie selbst zu finden §. 143. S. 146; γ) Kreisquadratur §. 145. Anm. S. 150. —

Einen Kreis 1) um ein Quadrat §. 95. S. 78; 2) um ein reguläres Polygon §. 96; 3) in einem gegebenen Dreyecke zu beschreiben §. 97; 4) wann ist ein Kreis in einer regulären Figur beschrieben? §. 94.

Es

Es sind nicht mehr, als 5 reguläre geometrische Körper möglich §. 161. Z. 2.

A. Der Prismen Kongruenz §§. 163. 165. II.; Gleichheit §. 166. Z.; Verhältniß zueinander ebend. II. Z. 1. — Des senkrechten Prisma Oberfläche aus §. 167. seinen körperlichen Inhalt zu finden §. 178.

B. Würfel von gleichen Seiten sind kongruent §. 163. Z; Würfel sind in triplizirtem Verhältniße ihrer Seiten §. 166. Z. 2. — Ihre Solidität zu finden §. 177.

C. Der Cylinder ist ein unendlicheckiges Prisma §. 169. — Zwey Cylinder sind unter einer Voraussetzung in triplizirtem Verhältniße ihrer Durchmesser ebend. Z. 2. — 1) Die ganze Oberfläche des senkrechten und schiefen Cylinders aus §. 169. Z. 3. mit Anm. und §. 143.; 2) dessen Solidität zu finden §. 178. Zz. 1—4.

D. Die Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, oder Cylinders ꝛc. §. 171. mit Z. 1. — Kongruenz §. 172., Gleichheit der Pyramiden §. 170. Z. 5. — Die ganze Oberfläche der senkrechten Pyramide aus §. 170. Z. 3. mit §. 137; ihre, wie der abgekürzten Pyramide Solidität zu finden §§. 180. 181. mit Z.

E. Der Kegel ist eine unendlicheckige Pyramide; wie diese, der 3te Theil eines Cylinders ꝛc. §. 171. Z. 3. — 1) Die ganze Oberfläche des senkrechten Kegels aus §. 171. Zz. 4. 5.; 2) die konische Oberfläche des schiefen Kegels beyläufig ebend. Anm.; 3) des Stumpfes zu finden §. 174. mit Z. und §. 143. Ferner den körperlichen Inhalt a) des ganzen Kegels §. 180. Z. b) des abgekürzten geraden Kegels zu finden § 182.

F. Die Kugel gleicht einer einzigen Pyramide ꝛc. §. 175. Z. 6, oder einem Kegel ꝛc. § 176. Z. 1, und ihre Oberfläche 4 größten Kugelkreisen § 176. Das Verhältniß der Kugel zum Würfel ihres Durchmessers §. 183. Z. 1. — Zu finden den körperlichen Inhalt der Kugel §. 183; 2) des Kugelausschnittes und Abschnittes §. 184. —

Das Delische Problem S. 204.

Einen cylindrischen Visirstab zu verfertigen S. 194 bis 96.

Den Inhalt eines Faßes zu messen S. 197.

Die Verwandlung geometrischer Körper §. 187.

Zweytens der Geodäsie.

Eine gerade Linie auf ebenem Felde 1) abzustecken §. 15. I. S. 8., oder 2) eines Hindernisses ungeachtet zu verlängern §. 48. Beysp. S. 35; oder 3) auf Bergen und zugleich in Tiefen abzustecken ebend. – Die Länge einer ganz oder zum Theil unzugänglichen geraden Linie zu finden §. 125. S. 116.

Eine abgesteckte gerade Linie auszumessen §. 15. II.; — nöthige Instrumente, um über kleine Erhöhungen auf dem Felde wegzumessen ebend.

a) Eine gerade Linie auf dem Papier zu ziehen §. 15. III; — b) Prüfung des Linials ebend.; — c) eine gemessene Länge auf das Papier zu tragen §. 115. 1) S. 96; — d) 2 gerade Linien von gegebenem Verhältnisse zu verzeichnen ebend. 2).

Der Federzirkel zur Eintheilung gerader Linien §. 24. S. 16. — Eine gerade Linie 1) mit dem verjüngten Maßstabe in mehrere gleiche Theile zu theilen §. 115. nr. 3. 4.; 2) mit dem Proportionalzirkel ebend. II. 1. 2.

Zu 3 gegebenen ger. Linien die 4te zu suchen §. 115. II. 3.

Perpendikularlinien zu errichten I. auf dem Papiere mit Hilfe des Winkelhackens oder 2 hölzerner Dreyecke §. 47. S. 33; — derselben Prüfung ebend. und §. 88.

§. 88 S. 73; — II. auf dem Felde mit Hilfe a) des Kreutzmaßes §. 48; — Prüfung desselben ebend. b) der Meßschnur oder Meßkette §. 60. S. 48.

Parallellinien zu ziehen I. auf dem Felde §. 53. S. 38; II. auf dem Papiere mit dem Parallellinial ebend.

Weiten oder Abstände zu messen a) wenn man zu beyden Gegenständen von einem Standpunkte o aus kommen kann §. 38. S. 28. erster Fall, und §. 118. I. S. 103; b) wenn man von o aus nur zu einem Gegenstande messen kann §. 38. zweyter Fall, und §. 118. I; c) wenn beyde Gegenstände unzugänglich sind §. 38. dritter Fall; 2) Benützung des Schalles ebend. 3) §. 118. II. Aufl. 1. 2. 4) mit Hilfe des Meßtisches ebend. Aufl. 3.

I. Die Höhe eines zugänglichen Gegenstandes zu messen A. mit Hilfe des Schattens §. 57. S. 46. §. 123. S. 114; B. mittels der Konstruktion eines ähnlichen △ §. 123. a; C. nach optischen Grundsätzen ebend. d; D. mit Hilfe senkrechter Stäbe ebend. c. — E. Die Höhe eines Berges zu messen mit der Wasserwage §. 69. 2). S. 54. (Methode die Höhe der Mondsberge zu finden S. 121.)

II. Die Höhe eines Gegenstandes zu finden, zu welchem man nicht in einer horizontalen Richtung kommen kann §. 123. 2. S 115; III. von einem ganz unzugänglichen Gegenstande ebend. 3.

Die Mittagslinie für einen gewissen Ort zu finden S. 152.

Die Abweichung der Magnetnadel für einen gewissen Ort zu finden S. 154.

Einen verjüngten Maßstab zu verfertigen §. 115. S. 94; als solcher dient auch der Proportionalzirkel ebend. II. 4 — Die Sehnenlinie dieses Instruments S. 155.

Winkel zu messen I. auf dem Felde a) mit dem Astrolabium, b) der Bussole S. 21 — 24; c) dem Mayer'schen Rezipiangle S. 159; II. auf dem Papiere, — und einen gemessenen Winkel auf das Papier zu tragen 1) mit dem gewöhnlichen Transporteur S. 24; 2) dem geradlinigen S. 158; 3) mit Hilfe der Sehnenlinie des Proportionalzirkels S. 155 — 56. III. Einen rechten Winkel auf dem Felde abzustecken S. 67. Anm. 2.

Der

Der Vernier oder Nonnius zu den Winkelinstrumenten §. 115. III. S. 99.

Horizontale Flächen zu bestimmen mit der Setzwage S. 9. mit S. 33., und des S. 153. B) bemerkten Instruments.

Den Flächenraum eines Trapezoids, einer irregulären Figur u. s. w. zu finden S. 136—139.

Den Abschnitt und Ausschnitt eines Kreises auf dem Felde zu finden S. 147. u. f.

Methode 1) des Eratosthenes, den Erdumfang zu messen S. 43. Anm.; 2) des Maurolycus den Durchmesser der Erde zu finden S. 121. Anm. 1.

Abhänge auf ihren horizontalen Flächenraum zu reduziren S. 139. nr. 4.

Einen Plan zu verfertigen 1) von einem zugänglichen freyen Platze sowohl, als wenn das Terrein nicht offen ist; 2) von einem unzugänglichen, auch mit Hilfe des Meßtisches S. 108. u. f.

Einen Riß auf das Feld überzutragen ebend. II.

Einem Plan oder Grundriße die ersten Punkte einer Windrose beyzufügen S. 152.

Thei-

Theilung des Feldes auf dem von ihm entworfenen Plan S. 62. u. f. u. S. 151. I. II. III.

Praktische Hilfsmittel zum Verjüngen der Figuren: 1) das Verzeichnen kleiner Quadrate über den Plan; 2) der Proportionalzirkel; 3) der Reduktionszirkel; 4) der Storchschnabel; 5) das Netz S. 129. u. f.

Der Geometrie

erster und zweyter Theil.

Einleitung.

§. 1. Erkl. Ausgedehnte Größe ist eine solche, deren Theile außerhalb einander sind. Ihr entgegengesetzt ist die intensive Größe. Stetig heißt die Größe, wenn das Aufhören des einen Theiles (Grenze) zugleich der Anfang oder die Grenze des andern ist. Das Gegentheil dieser ist die diskrete Größe.

Zusatz. Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher die reine allgemeine Größenlehre heißt (§. 16. B. *), nimmt keine Rücksicht auf eine der genannten Qualitäten der Größen.

§. 2. Erkl. Die Zahl der verschiedenen Arten von Grenzen, welche in einer ausgedehnten Größe statt finden, nennt man die Abmeßungen (dimensiones) der Größe. Eine Größe begrenzen, heißt Theile in ihr erzeugen; entstehen durch die Begrenzung dieser Theile wieder Theile oder Größen von einerley Art mit der getheilten Größe; so heißt die Größe ins Unendliche theilbar.

A §. 3.

*) So bezeichne ich kurz das unter dem Titel: die Buchstabenrechnung und niedere Algebra von mir herausgegebene Buch, Würzb. bey Jos. Stahel — 1806; und durch Z. meine bey Göbhardt erschienene Zifferrechnung.

§. 3. Erkl. Geometrie ist die Wissenschaft des Raumes.

Zusatz. Der Mathematiker betrachtet den Raum als eine einzige gegebene, ausgedehnte, stetige Größe, welche rings um uns unbegrenzt oder unendlich, und ins Unendliche theilbar ist (§. 2.).

Die Geometrie also, welche als strenge Wissenschaft von allem dem, was den Raum erfüllt, oder von den wirklich existirenden ausgedehnten Größen absieht, folglich zur reinen Mathematik gehört, ist die reine spezielle Größenlehre (§. 1. Zus.).

§. 4. Erkl. Die Wissenschaft, welche die Anwendung der Grundsätze der Geometrie (§. 3.) zur Größebestimmung wirklicher Naturobjekte, als ausgedehnter Größen, unter Voraussetzung empirischer Kenntnisse lehrt, heißt Geodäsie oder Feldmeßkunst (praktische Geometrie).

§. 5. Erkl. Der ganze unendliche Raum und jeder nach allen möglichen Seiten ausgedehnte Theil desselben heißt ein vollständiger oder körperlicher Raum (spatium completum s. solidum).

Ein völlig begrenzter körperlicher Raum heißt ein geometrischer Körper. Die Grenze eines geometrischen Körpers heißt eine geometrische Fläche; die Grenze dieser eine geometrische Linie, und dieser Grenze heißt ein geometrischer Punkt.

Zusatz 1. Also hat der geometrische Körper 3 Abmessungen (nach der Höhe oder Tiefe, Breite und Länge), die

die geometrische Fläche 2, und die geometrische Linie eine Dimension (§. 2).

Zusatz 2. Der geometrische Körper ist nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, und die Linie nicht aus Punkten zusammengesetzt. Denn Grenzen eines Dinges sind nicht Theile desselben (§. 1.). Dieß hindert jedoch nicht, sich die Entstehung der Linie aus der Bewegung des Punktes, u. s. w. der Klarheit willen vorzustellen.

§. 6. Axiom. Die geometrischen Körper, Flächen und Linien sind ausgedehnte, stetige Größen (§. 1.); die Punkte unausgedehnt und die letzte Grenze alles Ausgedehnten im Raume.

Zusatz 1. Die Theilung des geometrischen Körpers geschieht durch Flächen, die der Fläche durch Linien, und die der Linie durch Punkte (§. §. 2. 5).

Zusatz 2. Da man durch jene Theilung gleichartige Theile mit dem getheilten Ganzen erhält: so sind der geometrische Körper, die Fläche und Linie ins Unendliche theilbar (§. 2.).

§. 7. Eintheilung der Geometrie. Nach §. 6. sind die Linien, Flächen und geometrischen Körper überhaupt die Objekte der Geometrie (§. 3). Diese hat daher 3 wesentliche Theile, die Lehre von den Linien, Longimetrie, von den Flächen, von den geometrischen Körpern, Stereometrie.

Die Trigonometrie, welche die Wissenschaft ist, aus drey gegebenen Stücken eines Dreyeckes, wodurch dieses bestimmt wird, die übrigen durch Rechnung zu finden, ist keine rein geometrische Wissenschaft, indem sie erst durch die Anwendung der Arithmetik auf geometrische Gegenstände möglich wird.

Eine weitere Eintheilung der Geometrie ist die in die niedere oder Elementargeometrie, und höhere. Die niedere betrachtet nur eine einzige Art krummer Linien, nämlich die, wodurch die Kreisfläche begrenzt wird, und dann die ebenen Flächen als die leichteste Art von Flächen; daher in der niedern Geometrie die Lehre von den Flächen Planimetrie heißt. Die höhere Geometrie nimmt sich nebst der Kreislinie auch noch andere verschiedene Arten krummer Linien z. B. solche, welche bey dem bestimmten Schneiden des Kegels entstehen, und andere, als ebene Flächen, z. B. Flächen, die auf der Oberfläche der Kugel von 3 Bogen größter Kreise begrenzt werden, zum Gegenstand.

Anmerkung.

Da man die Linien, als Grenzen der Flächen, auch in beständiger Rücksicht auf diese in Betrachtung zieht, weswegen die Grenzen der zwey ersten Theile der niedern Geometrie so sehr ineinander laufen, daß sie nicht füglich ganz voneinander können getrennt werden: so sieht man hierin den Grund, warum viele ältere Mathematiker die Geometrie nur in die 2 Haupttheile: Flächen- und Kör-

per-

perlehre, eintheilten; und warum auch wir jene beyden Theile unabgesondert vortragen.

Das für Anfänger Wissenswürdigste aus der praktischen Geometrie (§. 4.) fügen wir jedesmal an Ort und Stelle in kurzen Noten bey.

§. 8. Axiome. I. Dinge, die aufeinander gelegt, kongruiren, oder deren Grenzen zusammenfallen, sind gleich.

II. Sind die Hälften gleich: so sind auch ihre Ganzen gleich; was überhaupt von allen ähnlichen Theilen und ihren Ganzen gilt (§. 94. Zus. 2. B.)

Der

Der Geometrie
erster und zweyter Theil,
oder
die Longimetrie in Verbindung mit der Planimetrie.

Erster Abschnitt
von den geraden Linien, der Kreislinie und den Winkeln.

§. 9. Erkl. Eine Linie heißt gerade (linea recta, s. simpliciter recta), deren Theile nach derselben Richtung liegen, wie AB (fig. 1.) krumm (curva), wenn keiner ihrer Theile gerade ist, wie ab (fig. 2). Besteht eine Linie aus verschiedenen geraden Linien, wie abcdf (fig. 3.), so heißt sie geradgebrochene; AB CD (fig. 4) ist eine krummgebrochene; fig. 5. zeigt eine gemischte Linie.

§. 10. Postulate *) I. Von einem Punkte zum andern eine gerade Linie zu ziehen.

II. Jede gegebene gerade Linie auf beiden Seiten ohne Ende zu verlängern.

§. 11.

*) Postulat (nach Lambert, Heischung) ist ein unmittelbar klarer, praktischer Satz, d. i. ein solcher, der fordert, daß etwas geschehen soll, wo aber die Art, wie dieses geschieht, so evident und leicht ist, daß sie nicht weiter kann und braucht nachgewiesen zu werden.

§. 11. Axiome. I. Von einem Punkte zu einem andern ist nur Eine gerade Linie möglich.

II. Durch zwey Punkte ist nach beyden Seiten ohne Ende fort nur Eine gerade Linie möglich.

Zusatz 1. Also ist durch 2 Punkte die gerade Linie sammt ihrer Verlängerung ins Unendliche gegeben.

Zusatz 2. Also sind 2 gerade Linien, wie AC, CB (fig. 1.), die 2 Punkte, A, C oder A, B, miteinander gemein haben, keine verschiedene Linien, sondern, beyde ins Unendliche verlängert, nur eine einzige (Zus. 1).

Zusatz 3. Gerade Linien also, die verschieden seyn sollen, z. B. BC, DC (fig. 6.), können nur einen einzigen Punkt (hier C) miteinander gemein haben; folglich auch keinen Raum begrenzen.

§. 12. Erkl. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene (superficies plana s. simpliciter planum) wenn die gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte in ihr zum andern ziehen mag, ganz in der Fläche liegt; krumm (?).

§. 13. Postulate. I. Eine Ebene nach jeder Seite ins Unendliche zu verlängern.

II. Durch eine gerade Linie und einen Punkt ausser ihr eine Ebene zu legen.

§. 14. Axiom. Durch eine gerade Linie und einen Punkt außer ihr ist ohne Ende fort nur Eine Ebene gegeben.

Zusatz 1. Also ist durch 3 Punkte, die nicht nach einer Richtung zu liegen, die Ebene mit ihrer Verlängerung ins Unendliche gegeben (§. 11. Zus. 1).

Zu-

Zusatz 2. Also sind 2 Ebenen, die 3 solche Punkte miteinander gemein haben, ohne Ende verlängert, nur eine.

Zusatz 3. Also können 2 verschiedene Ebenen nur eine gerade Linie und nur eine gerade Linie miteinander gemein haben.

§. 15. Erkl. Eine völlig begrenzte Fläche heißt eine Figur, die folglich eine ebene oder krumme ist (§. 12.). Die Grenze der Figur heißt ihr Umfang (perimeter); schließt eine einzige krumme Linie einen Raum ein (wie die Kreislinie); so heißt jener die Peripherie. Ist der Umfang der Figur aus mehreren Linien zusammengesetzt: so heißt jede derselben eine Seite der Figur.

Zusatz. Eine Figur, deren Umfang durch gerade Linien gebildet ist, hat wenigstens 3 Seiten (§. 11. Zus. 3.)

Allgemeine Anmerkung.

Alle Linien, Winkel, Figuren, von welchen hier und künftig die Rede ist, betrachten wir als in derselben Ebene verzeichnet.

Geodäsie.

I. Eine gerade Linie auf dem Felde abzustecken. — Hiezu bedient man sich der sogenannten Absteckstäbe oder cylindrischen Stangen, 5—6 Fuß hoch, und 1—2 Zoll dick, unten mit einem eisernen Stachel versehen. Zwey dieser Stäbe können höher und, um z. B. die Endpunkte der abzusteckenden Linie AK (fig. 7.) kenntlicher zu machen, mit Fähnchen versehen seyn. Sind nun die Stäbe AB, KL, mittels des an ihnen herabhängenden Lothes senkrecht in A und K aufgestellt,

stellt, und es soll in einer merklichen Entfernung von AB z. B. in D ein Stab in derselben Richtung aufgestellt werden: so visirt der Feldmesser, 2—3 Schritte hinter AB, längst diesem Stabe und dem Stabe KL vorbey, bis diese Ziellinie auch den Stab DE, welchen der Gehilfe zwischen 2 Fingern herabhängen läßt, und auf das gegebene Zeichen bald Rechts bald Links bewegt, vorbeytrift. Dann wird DE senkrecht eingesenkt. Auf diese Art kann man mehrere Stäbe nach Erforderniß zwischen A und K aufstellen, oder auch die Linie AK nach Willkühr verlängern.

II. Eine abgesteckte Linie oder Länge auszumessen (Euthymetria). Dieses kann überhaupt wieder nur durch eine gerade Linie geschehen, indem man bestimmt, wie oft diese als Einheit in der zu messenden enthalten ist (S. 232. B. 3.). Auf dem Felde bewerkstelligt man dieß entweder durch die sogenannten Meßstäbe, oder durch die Meßkette (oder auch nur, wenn nicht sehr große Genauigkeit erfordert wird, durch die Meßschnur). Im ersten Falle bedient man sich entweder lediglich eines Maßstabes, d. i. einer geraden, ungefehr 2'' breiten und 1'' dicken, 5–6' oder auch 10–12' (bey größern Linien) langen Stange, wo die Fuße noch in Zolle und Linien getheilt sind; oder man hat noch anderer Werkzeuge nöthig, z. B. um über kleine Erhöhungen des Bodens wegzumessen,

Erstens der Setzwage. Diese (fig. 8.) ist ein aus drey glatt gehobelten Leisten AB, AC, CB aus Lindenholz verfertigtes Dreyeck, durch welches quer und mit AB parallel die Leiste de geht. Das Loth gf hängt aus der Spitze g des Instruments an einem feinen Silberfaden oder Pferdehaar und zwar über den Punkt c herab, wenn das Instrument genau senkrecht steht, und folglich die Unterlage horizontal ist. (Wie man diesen Punkt findet, davon unten bey §. 47.) Zweytens eines kleinen Tischchen, oder etwa 2 Fuß hoher Schemmeln, welche müs-

sen sanft etwas erhöht oder erniedrigt werden können. Hierauf nun wird der Maßstab gelegt, und mittels des ersten Instrumentes horizontal gerichtet.

Die Meßkette besteht aus Eisendrahtstäben von der Dicke eines Federkiels, deren Enden umgebogen und durch Ringe von geschlagenem Messing verbunden sind. Ein solcher Stab, wie cd (fig. 9.) von einem Mittelpunkte des Ringes zum andern heißt ein Glied, deren jedes = 1′. Die Kette AB ist gewöhnlich 5° lang, und jede Ruthe durch einen größeren Ring M kenntlich gemacht. Die größten Ringe oder Halbringe, welche sich an den Enden der Kette in A, B befinden, können an 2 Stäben gedränge hinabgeschoben werden. Die Kettenstäbe, etwa 4′ hoch, unten mit Eisen beschlagen und einem Stachel versehen, haben tief unten einen auf beyden Seiten hervorragenden Stift, worauf die herabgelassene Kette ruhen kann. — Soll nun z. B. AK (fig. 7.) gemessen werden: so wird der Stab AB ausgehoben, und der Kettenstab senkrecht eingesetzt; an diesem die Kette bey A befestigt und z. B. bis a vom Kettenzieher angespannt, wo er den andern Kettenstab, wie oben den Absteckstab, einsteckt. Bey A wird nun der Absteckstab wieder, und bey a ein Zeichenstäbchen (etwa 8″ lang, ½″ dick) eingesteckt. So wird dieselbe Operation fortgesetzt. Aus der Anzahl der vom Feldmesser ausgezogenen und gesammelten Kettenstäbe ergiebt sich am Ende die Länge der Linie.

III. Eine gerade Linie auf dem Papiere zu ziehen. Dieses geschieht mittels des Linials (regula). Ob dieses Instrument richtig sey, prüft man so: Man zieht mittels desselben z. B. die feine Linie rns (fig. 10.) und kehrt dann das Linial so um, daß N nach N′, M nach M′ ꝛc. zu liegen kömmt; zieht man nun längst derselben Schärfe, wie vorhin, die Linie rms, und diese fällt mit rns zusammen, so ist das Linial an dieser Schärfe vollkommen, wo nicht, wie in der Figur; so muß man durch Schleifen dieser Schärfe nachhelfen.

§. 16.

§. 16. Erkl. Die Linie AEBDA (fig. 11.), die einen Theil der Ebene so begrenzt, daß alle geraden Linien, die aus ihr nach einem Punkte C in derselben Ebene gezogen werden, gleich sind, heißt eine Kreis- oder Cirkellinie, und der Punkt C ihr Mittelpunkt (Centrum). Jede gerade Linie CA, CD .. aus C nach der Kreislinie gezogen, heißt ein Halbmesser (radius); die von einem Punkte der Kreislinie zum andern gezogene gerade Linie, wie AB, heißt Durchmesser (diameter). Jeder Theil der Kreislinie, wie AD, heißt ein Bogen (arcus); die von einem Endpunkte A des Bogens AD zum andern D gezogene gerade Linie ist des Bogens Sehne (chorda).

Kreislinien AEBDA, aebda, die einerley Mittelpunkt haben, heißen konzentrische, sonst exzentrische, wie AEBD, FIRF; die Linie CG, welche beyder Mittelpunkte verbindet, heißt Zentrallinie.

Zusatz 1. Also sind alle Radien derselben Kreislinie, wie die Durchmesser, als doppelte Radien, einander gleich.

Zusatz 2. Der Halbmesser Co (fig. 12.) hat mit der Kreislinie nur einen Punkt gemein. Denn hätte Co außer o mit ihr noch einen andern Punkt z. B. D oder m gemein: so wäre entweder CD=Co, oder Cm=Co, was ungereimt ist. Folglich hat der Durchmesser nur 2 Punkte mit der Kreislinie gemein.

§. 17. Postulat. Aus jedem Punkte mit einem beliebigen Halbmesser eine Kreislinie zu ziehen.

Zusatz. Da man verschiedene Kreislinien, die aber

mit einerley Halbmesser gezogen sind, als eine und dieselbe Kreislinie betrachten kann; so erhellt, daß auch die Halbmesser und Durchmesser dieser Kreislinien einander gleich sind (§. 16. Zus. 1).

Anmerkung.

Mechanisch wird die Kreislinie mittels des Zirkels (circini), eines bekannten Instruments, gezogen, indem nämlich, wenn die eine Zirkelspitze in C (fig. 12.) steht, und die andere von E aus durch A . . bis wieder zu E bey derselben Oeffnung der Schenkel geführt wird, dasselbe zum Vorschein kommen muß, was entstehen würde, wenn man sich den Halbmesser CE in der Ebene bis in seine erste Lage herumgeführt vorstellte; in welchem Falle man sich die Kreislinie von seinem äussersten Punkte E beschrieben denkt.

§. 18. Hypothesis. Ueber die gewöhnliche Eintheilung der Kreislinie sehe man S. 220. Z. und die neuere Eintheilung derselben von den Franzosen S. 225. ebend. Hier bemerken wir nur noch, daß der Astronom nach Zeichen zählt, nämlich $1^s = 30°$; wo also die ganze Kreislinie in 12 Zeichen getheilt wird. Die Schiffer endlich theilen dieselbe in 32 gleiche Theile, deren jeder 1 Windstrich oder Wind heißt, also $= 11° 15'$ ist.

Zusatz. Bogen konzentrischer Kreislinien zwischen denselben Halbmessern, wie AD, ad (fig. 11) haben eine gleiche Anzahl von Graden, Minuten . . AD nur größere, ad kleinere.

§. 19. Lehrsatz. Der unendlich vielste Theil einer endlichen Linie ist kein Theil von ihr, sondern ein Punkt.

Be-

Beweis. Da jeder Theil einer Linie wieder eine Linie (§. 6. Zus. 2.) ist; aus der Wiederholung aber desselben Theiles die ausgedehnte Größe erzeugt gedacht werden muß: so müßte der unendlich vielste Theil einer endlichen Linie, der wieder eine Linie seyn sollte, ein solcher Theil der Linie seyn, durch dessen unendliche Wiederholung die endliche Linie erzeugt würde, was widersprechend ist.

Zusatz 1. Also ist der unendlich vielste Theil einer Kreislinie ein Bogen, der mit seiner Sehne einerley ist, d. i. ein Punkt, welcher mit der Sehne zusammenfällt.

Zusatz 2. Also kann man die Kreislinie auch wie eine geradgebrochene (§. 9.) ansehen, die aus unendlich vielen gleichen Theilen besteht. Denn denkt man sich die Kreislinie in unendlich viele gleiche Theile getheilt: so fällt jeder dieser Theile mit seiner Sehne zusammen (Zusatz 1.), oder die Kreislinie ist einerley mit allen diesen unendlich vielen Sehnen, also auch mit einer geradegebrochenen Linie, durch jene Sehnen dargestellt.

§. 20. Lehrsatz. Der Durchmesser AB (fig. 12.) theilt die Kreislinie in 2 Hälften, d. i. AEB=AoB.

Beweis. Man denke sich den untern Theil AEB der durch ADBEA begrenzten Fläche auf den obern AoB gelegt: so kann jener weder über diesen hinaus, noch innerhalb desselben fallen. In jenem Falle wäre CD= CE=Co; in diesem wäre Cm=CE=Co; d. i. das Ganze gleich dem Theile und umgekehrt; folglich kongruiren beyde, also sind sie einander gleich (§. 8: I.)

Zu-

Zusatz. Also ist der Theil der Kreislinie, welcher den Durchmesser zur Sehne hat, oder auf dem Durchmesser steht, $= 180°$.

§. 21. Lehrsatz. Wenn die Halbmesser AC, HI (fig. 11.) zweyer Kreislinien AEBDA, FIRHF und die Zentrallinie CG so groß sind, daß jede 2 von diesen drey Linien zusammen größer, als die dritte sind: so haben beyde Kreislinien 2 Punkte gemein, den einen F über, den andern H unter der Zentrallinie, und der eine Theil der einen liegt innerhalb, der zweyte außerhalb der andern.

Beweis. $(IG + GC) > AC$, vermöge der Voraussetzung, folglich $IC > CB$ (§. 16. Zus. 1.); also liegt der Endpunkt B vom Durchmesser AB zwischen I und C; eben so ist $(AC + CG) > GI$, daher $AG > GK$, also liegt der zweyte Endpunkt A des Durchmessers AB ausserhalb der Kreislinie FIRHF, und der Endpunkt K des Durchmessers IK zwischen A und G, folglich entweder in C oder zwischen C und A z. B. in a, oder zwischen C und G. Liegt K in C oder a: so liegt der Punkt B, indem er zwischen I und C liegt, innerhalb der Kreislinie FIHKF; liegt aber K zwischen C und G: so liegt B zwischen K und I, wieder innerhalb derselben Kreislinie. Denn fiele B selbst in K: so wäre $CB + KG = CG$ (wider die Vorauss.); oder zwischen K und C z. B. in b, so wäre $(CB + KG) < CG$ (indem noch ein Theil zu CB und KG fehlte, um CG gleich zu seyn), wieder gegen die Vorauss. Also liegt B innerhalb FIKF, und A ausserhalb. Da nun diese Kreislinie die gemeinschaft-

liche

liche Grenze von der innerhalb ihr und außerhalb liegenden Ebene ist: so geht nothwendig eine jede Linie vom Punkte B nach oben zu dem, außer der Kreislinie liegenden, Punkte A durch diese gemeinschaftliche Grenze; eben so jede von B nach unten zum Punkte A gezogene Linie; d. i. die Kreislinie AEBDA hat mit der andern die Punkte F und H gemein, und FBH liegt innerhalb und FEDH außerhalb der andern Kreislinie.

§. 22. Aufgabe. Eine gerade Linie, deren Anfangspunkt und Lage gegeben ist, einer gegebenen gleich zu machen.

Auflösung. Erster Fall. Hat die Linie GQ (fig. 11.), wovon ein Theil der gegebenen GI gleich gemacht werden soll, einerley Anfangspunkt G mit dieser gemein; so giebt die mit dem Halbmesser = GI gezogene Kreislinie den Theil GR = GI (§. 16. Zus. 1.) an.

Zweyter Fall. Liegt aber der Anfangspunkt A (fig. 13.) der erstern Linie AR außerhalb der gegebenen CB: so verbinde man beyder Anfangspunkte durch AC, beschreibe aus A und C mit AC die beyden Kreislinien; nach dem beyden gemeinschaftlichen Punkte F (§. 21.) ziehe man AF, CF; verlängere beyde willkührlich, so daß CD = CB und FE = FD nach Fall I. gleich gemacht werden kann. Macht man nun AQ = AE (nach Fall I.): so ist auch AQ = CB.

Beweis. Vermöge der Construktion ist AF = CF (?) und daher (?) AE = CD = CB, folglich auch AQ = CB (?).

Drit-

Dritter Fall. Liegt der Anfangspunkt der einen Linie pB (fig. 14.) in der Linie rq, welcher ein Theil von jener px gleich werden soll, oder liegt der Anfangspunkt A der Linie An in der Verlängerung von rq: so mache man aus der willkührlich gezogenen Linie rz den Theil rs=rq (nach Fall I.); und diesem Theile rs nach Fall II. gleich px oder An.

§. 23. **Aufgabe. Auf der unbegrenzten geraden Linie AB den Theil Am so vielmal aufzutragen, als man will.**

Auflösung. Man mache mn=Am, nr=mn u. s. w. (§. 22).

§. 24. **Aufgabe. Die gerade Linie AB n^{mal} so groß, als die gegebene DE zu machen.**

Auflösung. Macht man Am=DE, und verfährt dann nach §. 23; so ist z. B. Ax=6DE.

Geodäsie.

Zur Eintheilung gerader Linien bedient man sich des Federzirkels (fig. 15.). CDE ist eine Feder, an welcher die Schenkel CA, EG von gehärtetem Stahle heruntergehen; in diese sind die Füße des Zirkels AL, GM, wie gewöhnlich eingesenkt. BF ist ein mit feinen Schraubengängen versehener Zirkelbogen, bey B befestigt, aber in einer Oeffnung des andern Schenkels beweglich. Durch die Schraubenmutter H können die Schenkel CL, EM sanft genäheret oder auseinander gebracht werden.

§. 25. Erkl. Wenn 2 Linien einen Punkt gemein haben, wie (fig. 6.) DC, BC den Punkt C: so sagt man, sie stossen zusammen (concurrunt in C,

puncto

puncto concursus); stoßen sie so zusammen, daß nicht alle Theile derselben Linie DE auf derselben Seite der andern AB nach dem Zusammenstoßen bleiben: so schneiden sie einander, und jede Linie DE heißt der andern AB Sekante für den Punkt C, dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte (puncto intersectionis). Bleiben aber alle Theile derselben Linie DE (fig. 16.) auch nach dem Zusammenstoßen auf derselben Seite der andern Linie ACB; so sagt man, sie berühren einander in C, dem Berührungspunkte (puncto contactus); und die gerade Linie DE heißt die Tangente (tangens) von ACB für den Punkt C.

Zusatz. Zwey verschiedene gerade Linien AB, CB (fig. 17.) können nur in einem Punkte B zusammenstossen (§. 11. Zus. 2.), und 2 in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien können sich, verlängert, auch nur in einem Punkte B schneiden. Denn wenn BD die Verlängerung für AB ist: so kann die Verlängerung für CB weder in BD, weder über BD z. B. in Be liegen. Denn denkt man sich aus C die Kreislinie gezogen: so wären in jenem Falle ad, cd Durchmesser, folglich $z = x + y + o$; und $y + o = z + x$, also $z = y + o - x$ (§. 61. B.) $= x + y + o$; was ungereimt ist. Aehnlichen Widerspruch findet man im 2ten angenommenen Falle (?); also liegt die Verlängerung von CB unter AD d. i. CB, AB verlängert schneiden sich in einem einzigen Punkte, können sich folglich nicht blos berühren.

§. 26. Erkl. Die Neigung zweyer zusammenstossenden Linien z. B. AB, AC im Punkte A (fig. 18.), oder

vielmehr die Abweichung zweyer Linien vom gemeinschaftlichen Punkte A aus, heißt ein Winkel (angulus), dessen Schenkel (crura) jene Linien AB, AC sind; der Punkt A heißt die Spitze oder der Scheitel (vertex) des Winkels.

Nach Beschaffenheit der Schenkel (§. 9.) theilt man die Winkel in geradlinige, wie fig. 18, krummlinige, wie fig. 19, und gemischtlinige, wie fig. 5. abc. Man bezeichnet nämlich den Winkel entweder durch 3 Buchstaben, in deren Mitte der an der Spitze des Winkels stehende vorkömmt, so (fig. 18.) BAC (nicht CBA); oder durch einen Buchstaben, der am Scheitel steht, z. B. der Winkel b fig. 5. (wenn keine Zweydeutigkeit entsteht), oder durch einen kleineren Buchstaben, wie m und n in fig. 18. 20. — Hier ist blos vom geradlinigen Winkel die Rede.

Man denkt sich den Winkel dadurch entstanden, daß z. B. die Linie DE (fig. 20.), die über DF lag, nach und nach in die Lage DE so verschoben würde, daß nur noch D gemein blieb.

Zusatz 1. Man sieht leicht ein, daß wenn AC von AB (fig. 18.) von A aus soweit abweicht, als (fig. 20.) DE von DF, oder daß wenn beyde Winkel D und A, aufeinandergelegt, kongruiren, D und A gleich sind.

Zusatz 2. Das Maß des Winkels ist irgend ein Bogen, welcher vom Scheitelpunkte A, als vom Mittelpunkte einer Kreislinie aus, gezogen wird. Dergleichen Bogen kann man sich auch von den Punkten l, s bey der Auseinanderweichung der geraden Linien AB, AC

be-

beschrieben denken; d. i. so wie zur Größe dieser Neigung oder Abweichung die Länge der geraden Linien nichts beyträgt; eben so ist nicht die Länge des zwischen den Schenkeln des Winkels gezogenen Bogens das Maß des Winkels, sondern das durch die Anzahl der Grade dieses Bogens ausgedrückte Verhältniß des Bogens zur ganzen Kreislinie.

§. 27. Lehrsatz. Wenn der Winkel BAC=bac (fig. 21), und man legt den Scheitel a des einen Winkels auf den Scheitel A des W. BAC, und den Schenkel ab auf AB: so fällt auch der Schenkel ac auf AC.

Beweis. Wäre ad der Schenkel ac seiner Lage nach: so wäre bad=bac=BAC, d. i. der Theil gleich dem Ganzen. Fiele ac unter AC in die Lage ae; so würde folgen, daß der Theil gleich wäre dem Ganzen. Also ꝛc.

§. 28. Aufgabe. Einen Winkel CAB (fig. 18.) zu konstruiren, welcher einem gegebenen Winkel n (fig. 20.) gleich ist.

Auflösung. Man ziehe willkührlich AB und aus A mit beliebigem Halbmesser den Bogen sq, mit demselben Halbmesser aus D den Bogen EF, und trage diesen auf sq über, indem man den Punkt r, worauf E fällt, bemerkt. Zieht man nun durch A und r die gerade Linie AC: so ist der Winkel CAB=EDF (§. 26. Zus. 1. 2.)

§. 29. Erkl. Zwey Winkel ACE, BCE (fig. 22.) welche einen gemeinschaftlichen Schenkel EC haben, und deren zwey andere Schenkel eine gerade Linie bilden, heis-

sen Nebenwinkel (anguli contigui s. deinceps positi). Zwey gleiche Nebenwinkel z. B. ACE, ECB heißen rechte Winkel (ang. recti), der gemeinschaftliche Schenkel EC heißt das Perpendikel, Loth, oder die senkrechte gerade Linie auf AB. — Das Zeichen für den rechten Winkel ist R. — Sind die Nebenwinkel ungleich, wie ACD, DCB: so heißen sie schiefe Winkel (ang. obliqui). Ein Winkel, welcher < 2 R, heißt ein hohler (concavus); welcher > 2 R, ein erhabener (convexus). Ein hohler Winkel, welcher $<$ R heißt ein spitzer (acutus); ist er $>$ R, ein stumpfer (ang. obtusus); Ist z. B. ACE$=$R: so ist der Winkel ACD ein stumpfer und DCB oder ECD ein spitzer Winkel.

Zusatz 1. Denkt man sich aus C, als aus dem Mittelpunkte, eine Kreislinie gezogen; so erhellt, daß jedes Paar Nebenwinkel $= 180°$ (§. 20. Zus.), folglich jeder der gleichen Nebenwinkel $= 90°$; jeder stumpfe $> 90°$ und jeder spitze $< 90°$ sey. Ferner sieht man ein, daß, wenn man sich auch auf der andern Seite der Linie AB noch mehrere gerade Linien, wie FC, GC gezogen denkt, alle die um C, als dem gemeinschaftlichen Scheitel, gebildeten Winkel zusammen $= 360°$ sind, d. i. alle Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, und deren Schenkel nach entgegengesetzten Richtungen fallen, sind zusammen $= 4$ R, so wie jede 2 Nebenwinkel zusammen $= 2$ R.

Zusatz 2. Jede gerade Linie eB (fig. 17), welche mit einer von ihr verschiedenen AD zusammenstößt, bil-

det

det mit dieser sowohl einen hohlen Winkel eBA = eBC + CBA, als erhabenen Winkel eBA = eBg + gBA; und beyde sind zusammen = 4R = 360° (Zus. 1).

§. 30. Erkl. Ein Winkel DCB (fig. 22), welcher einen andern ACD zu 180° oder zu 2R ergänzt, ist dieses Winkels Supplement; und ein Winkel ECD, welcher einen andern DCB zu 90° oder zu R ergänzt, ist dieses Winkels Complement.

Zusatz 1. Also ist von 2 Nebenwinkeln jeder des andern Supplement (§. 29. Zus.).

Zusatz 2. Gleiche Winkel haben gleiche Ergänzungen, und Winkel, die gleiche Ergänzungen haben, sind gleich.

§. 31. Erkl. Zwey Winkel, welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt zweyer sich schneidenden Linien (§. 25.) zum Scheitel haben, heißen Vertikal- oder Scheitelwinkel (anguli ad verticem oppositi).

Zusatz. Also sind jede 2 Vertikalwinkel ACB, DCE (fig. 23), oder ACD, BCE einander gleich (§. 30. Zus. 2). So hat jeder der erstern Winkel den Winkel BCE zum Supplement (§. 30. Zus. 1.).

Geodäsie.

I. Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Hiezu bedient man sich gewöhnlich des sogenannten Astrolabiums, oder der Boussole. A. Das Astrolabium (fig. 24.) *) besteht aus einer messingenen Platte, oder nur aus einem messingenen Ringe, worauf eine Kreislinie mit willkührlichem (höchstens $\frac{3}{4}$' langen) Halbmesser gezogen, und in 360°, oft auch noch in ihre kleinern Theile

*) Von seinem anfänglichen Gebrauche so genannt.

le mit Genauigkeit getheilt ist. Nicht selten wählt man auch nur einen halben Ring mit einer halben getheilten Kreislinie, wie fig. 25. 26., oder auch nur eine Viertelskreislinie, in welchem Falle das Instrument ein Quadrant heißt, dessen man sich mit Vortheil bey Höhenmessungen bedient. Aber zur Vervielfachung von Winkeln sind ganze getheilte Kreislinien nothwendig.

Das Astrolabium (fig. 24.) besteht 2. aus einem beweglichen Diopterlinial AB. Dieses ist ein sich genau um den Mittelpunkt E der auf der Platte verzeichneten Kreislinie bewegendes Linial, an dessen beyden Enden 2 messingene Plättchen ADe, BGr senkrecht aufgerichtet sind. Diese Plättchen heißen die Absehen oder Diptern, und das Linial das Absehelinial oder die Alhidadenregel. Die eine Diopter BGr (Okulardiopter) ist mit einem feinen Schlitze, der senkrecht auf die Ebene des Linials ist, versehen; durch die andere ADe, die Objektivdiopter, geht eine größere Oeffnung, in deren Mitte ein zarter Silberfaden oder ein Pferdehaar Di angespannt ist.

Der Winkelmesser fig. 25. ist noch mit einem unbeweglichen Liniale (gleichsam der Durchmesser der Kreislinie), welches ebenfalls Dioptern hat, versehen. Statt dieses Linials hat der Winkelmesser fig 26. ein Fernrohr; ein solches wird auch auf der Alhidadenregel statt der Dioptern angebracht, um das Objekt größer und deutlicher zu sehen.

Gebrauch. Es sey nun das Astrolabium z. B. horizontal auf seinem Stativ (fig. 24) gestellt, und dem Auge in O erscheine ein Objekt vom Faden Di bedekt: so bemerkt man auf der Platte den Theilstrich m. Wendet man nun, bey unverrükter Lage der Platte, die Alhidadenregel AB nach irgend einem zweyten Objekte: so ist mn, oder der Bogen xy, der zwischen den Visirlinien (Alhidaden) si, pq liegt, das Maß des Winkels iED, oder des Horizontalwinkels, gebildet von den 2 Vertikal-

kalebenen, welche man sich durch den Mittelpunkt des Instruments und durch die beyden Objekte, nach denen man visirt hat, gelegt denkt.

B. Die Boussole, welche bey den Winkelmessern fig. 26. 25. nur angebracht ist, um die Lage des Ortes, wo man operirt, und der Gegenstände, nach welchen man visirt, in Beziehung auf Nord, Süd, Ost, West zu bestimmen, besteht aus einem runden cylindrischen Gehäuse von Messing, mit einem Glasdeckel versehen, in dessen Mittelpunkte auf einem conischen Stifte eine Magnetnadel ab frey spielt. Dieses Gehäuße wird auf einer viereckigen Platte, an welcher sich eine dioptrische Regel, oder ein Fernrohr AB befindet, festgemacht (bey unseren Figg. denke man sich DC weg, und den eingetheilten Ring als eine ganze, etwas kleinere Platte.). Genau getheilt wird ein an der innern Seitenwand des Gehäußes in einiger Entfernung vom Boden befestigter, und mit der Platte gleichlaufender Ring acba; so, daß die Magnetnadel auf demselben beym Drehen der Platte Grade, Minuten ꝛc. zeigen kann. Der Diameter 0° 180° dieser so eingetheilten Kreislinie muß gleichlaufend seyn mit der Visirlinie xv.

Gebrauch. Um mit der Boussole z. B. den Winkel AcB (fig. 28) auf dem Felde zu messen, so bringe man sie, auf ein taugliches Stativ gesetzt, über den Scheitel c, und gebe ihr eine horizontale Stellung. Dann kehre man das ganze Instrument so lange herum, bis man durch die Diopteren den einen Gegenstand A erblickt. Die ruhig gewordene Magnetnadel zeige mit ihrer nördlichen Spitze z. B. 30° 18′, aber, nachdem man die ganze Boussole weiter umdrehte, bis man den Gegenstand B erblickt, 65° 20′. Daher wird nun der Winkel $AcB = 65° 20' - 30° 18' = 35° 2'$ seyn. Es ist nämlich aus der Einrichtung klar, daß, wenn dieser Winkel 65° 20′ seyn sollte, die Magnetnadel in der Richtung des Diameters 0° 180° (fig. 26) hätte stehen müssen, während die Visirlinie xv auf das Objekt A getroffen hätte.

Die Boussole gewährt indessen keine große Genauigkeit, weswegen man sich auch nur derselben bedient, um die zum Detail eines Plans oder einer Charte gehörigen Punkte zu bestimmen, da schon die Hauptpunkte genau bestimmt sind.

Es erhellet leicht, daß man mittels eben dieser Instrumente einen Winkel von gegebenem Maße auf dem Felde bilden könne.

II. Einen gemessenen Winkel aufs Papier aufzutragen, oder einen Winkel auf dem Papiere zu messen.

Das gewöhnliche, obgleich ziemlich unsichere Instrument, dessen man sich zu beyden Zwecken bedient, ist der sogenannte Transporteur fig. 29. Die Fig. zeigt, wie man die Größe des Winkels BAC finden, oder, nachdem man AB gezogen, und den Mittelpunkt der getheilten halben Kreislinie an A gelegt hat, durch Ziehung der Linie AE einen Winkel = 50° verzeichnen könne, dessen Supplementwinkel = 130° ist.

Zweyter Abschnitt

von den Dreyecken.

---

§. 32. Eintheilung der Figuren. Man theilt die Figuren überhaupt (§. 15) nach der Beschaffenheit der Seiten in geradlinige, krummlinige und gemischtlinige. Den Winkel, welcher von je 2 zusammenstoßenden Seiten der Figur gebildet wird, nennt man auch Ecke. Indem die erste Seite sowohl mit der 2ten als letzten eine Ecke bildet: so hat jede geradlinige Figur soviel Ecken als Seiten. Daher die folgenden Benen-

nun-

nungen. Die geradlinige Figur (§. 15. Zus.) von mehreren Seiten heißt Polygon (polygonum); nach der bestimmten Anzahl der Seiten ist sie entweder ein Dreyeck (trigonum), ein Viereck (pol. quadrilaterum), ein Fünfeck (pentagonum); ein Sechseck (hexagonum), Heptagon, Octogon, Enneagon, Dekagon ... Das Fünfzehneck (pentadecagonum).

Das Polygon heißt regulär, wenn es aus lauter gleichen Seiten und gleichen Winkeln besteht; sonst irregulär. — Jede gerade Linie von einer Ecke des Polygons zur andern heißt die Diagonale; die Linie, über welche man sich überhaupt ein Polygon errichtet denkt, nennt man Grundlinie (basis); im Dreyecke heißt der Scheitel des Winkels, dessen Schenkel auf die Basis aufstehen, die Spitze (vertex) des Dreyecks. Das Zeichen für das Dreyeck ist △; das Viereck wird blos durch die an den zwey gegenüberstehenden Ecken gesetzten Buchstaben bezeichnet.

§. 33. Eintheilung der Dreyecke *), erstens in Ansehung ihrer Winkel.

In dieser Rücksicht hat man 1. das rechtwinklige (triangulum rectangulum) BCO (fig. 38), welches einen rechten Winkel BOC hat; die diesem Winkel entgegenstehende Seite BC heißt die Hypotenuse, die übrigen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen die Katheten, wie BO, OC; 2. das stumpfwinklige Dreyeck (tr. obtusangulum s. amblygonum)

CFA

*) Daß hier nur von geradlinigen Dreyecken die Rede sey, ist oben schon erinnert.

CFA (fig. 36.), welches einen stumpfen Winkel CAF hat; 3. das spitzwinklige (tr. acutangulum s. oxygonum), fig. 30. mit lauter spitzen Winkeln; 4. das gleichwinklige (tr. aequiangulum), fig. 13. △ AFC, mit lauter gleichen Winkeln. Aber wechselseitig gleichwinklige Dreyecke sind solche, wo die einzelnen Winkel in dem einen Dreyecke gleich sind den einzelnen Winkeln im andern; z. B. wenn (fig. 30) A=D; C=F; B=E.

Zweytens in Ansehung der Seiten hat man entweder, das gleichschenklige Dreyeck (tr. isosceles s. aequicrurum) fig. 34. △ ABC, welches 2 gleiche Seiten AC, BC hat; die dritte AB heißt dann die Grundseite; oder das gleichseitige (tr. aequilaterum s. isopleurum), welches alle Seiten gleich hat, oder das ungleichseitige (tr. scalenum) von lauter ungleichen Seiten. Was sind wechselseitig gleichseitige Dreyecke?

Zusatz. Ein gleichseitiges Dreyeck ist auch ein gleichschenkliges, welche Seite man auch als Basis nehmen mag; aber nicht umgekehrt.

§. 34. Aufgabe. Ueber die Grundlinie AC (fig. 13.) ein gleichseitiges Dreyeck zu konstruiren.

Auflösung. Diese sammt Beweis ergiebt sich aus §. 22. Fall II.

§. 35. Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF (fig. 30.) zwey wechselseitig gleiche Seiten, AC =DF, BC=EF, einen gleichen Winkel, C=F, einschließen; so ist 1. auch die 3te Seite gleich der 3ten

AB

AB = DE; 2. sind beyde Dreyecke gleich; 3. die gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel sind wechselseitig gleich, A = D, B = E.

Beweis. Man bringe das △ DEF so über das △ ABC, daß der Scheitel F auf C und FD auf AC fällt: so wird auch FE auf CB (§. 27.); folglich, der Voraussetzung gemäß, auch der Punkt D auf A, und E auf B fallen; also 1. die Seite AB = DE, und 2. das △ DEF = △ ABC (§. 8. I.); 3. da die Scheitel, A, D und die Schenkel der Winkel CAB, FDE kongruiren; so sind auch diese, und eben so die Winkel B, E gleich (§. 26. Zus. 1.)

§. 36. Aufgabe. Ein dem gegebenen △ ABC gleiches △ zu konstruiren.

Auflösung. Man mache DE = AB (§. 22.), D = A (§. 28.) und DF = AC; ziehe von F nach E eine gerade Linie: so ist △ DEF = △ ABC (§. 35.)

§. 37. Lehrsatz. Wenn in zwey Dreyecken ABC, DEF eine Seite der andern gleich ist, AB = DE, und die an dieser Seite liegenden Winkel wechselseitig gleich sind, A = D, B = E: so sind die ganzen Dreyecke gleich, und, speziell wieder, der dritte Winkel dem dritten gleich, C = F, und die den gegebenen gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten wechselseitig gleich, BC = EF, AC = DF.

Beweis. Dieser wird auf ähnliche Art, wie der bey §. 35. geführt.

§. 38. Aufgabe. Ein dem gegebenen Dreyecke ABC gleiches zu konstruiren.

Auf-

Auflösung. Mit Berücksichtigung der Hypothesis im vorigen Lehrsatze verfahre man ähnlich, wie bey §. 36.

Geodäsie.

Den horizontalen Abstand zweyer Gegenstände zu finden.

Man versteht unter horizontalen Abstand zweyer Gegenstände A, B. (fig. 31.) die gerade Linie AB, die man zwischen 2, in derselben horizontalen Ebene liegenden, Punkten dieser Objekte gezogen denkt. Daß diese Vorstellungsart des Geodäten richtig sey, ergiebt sich noch unten (§. 64, und §. 65 Zus. 1.).

Erster Fall. Wenn man AB wegen des Hindernisses H nicht unmittelbar messen, aber doch von einem willkührlich angenommenen Punkte C zu A und B gehen kann.

Man setze in C einen Stab lothrecht ein, und messe AC, BC (§. 15. Geod.). Diese gemessenen Weiten trage man rückwärts in derselben Richtung bis E und D; die gemessene Linie DE ist der gesuchte Abstand (§. 35.).

Zweyter Fall. Wenn man vom willkührlich angenommenen Standorte C (fig. 32.) nur nach B kommen, aber nach A sehen kann.

Man messe CB, und trage sie in ihrer Verlängerung bis D, so, daß CD=CB. Man messe dann (§. 31. Geod.) die Winkel ABC, ACB. Von D aus messe man in der Richtung der Visirlinie, welche mit DC einen Winkel CDE=ACB bildet, bis E, wo man den in C aufgestellten Stab und das Objekt A in einer geraden Linie sieht. Diese gemessene DE ist der gesuchte Abstand (§. 37).

Ohne Winkel zu messen, dürfte man nur AB bis F willkührlich verlängern, und die von C aus gemessenen CB, CF rückwärts bis D und G tragen; dann in der Richtung der in diesen Punkten aufgestellten Stäbe bis E messen, wo der Stab E in gerader Linie mit E, C, A stünde; so wäre wieder DE die gesuchte Weite (§. 37. indem der

der Winkel CBF = d. W. CDG (?), daher ABC = CDE (§. 30. Zus. 2.)).

Dritter Fall. Wenn man weder zu A noch B (fig. 33.) füglich kommen kann.

Man setze in einiger Entfernung vom Standpunkte C in der Richtung CA, CB 2 Stäbe m, n. Mache dann die verlängerte ns = nC und rm = mC; eben so mache man pm, nq gleich mn. Nachdem man bey s, q, r, p Stäbe aufgestellt hat; setze man in x einen Stab, so, daß er mit n, A und auch mit q, s in gerader Richtung ist. Dasselbe thue man in v. Macht man nun die verlängerte CD = rv, und CE = sx, welche gemessen worden: so ist die gemessene Weite DE der gesuchte Abstand (§. 35). Denn sx = AC. Denn △mCn = △snq (§. 35), folglich der Winkel mCn = dem Winkel nsq; daher sind auch die △△ ACn, nxs gleich (§. 37); folglich sx = AC. ꝛc. *)

§. 39. Lehrsatz. Im gleichschenklichen Dreyecke ABC (fig. 34.), wo AC = BC seyn soll, sind I. sowohl die Winkel an der Grundseite AB einander gleich, m = n, als, bey Verlängerung der Schenkel, die Winkel unter der Grundseite gleich, DAB = ABE; und II. umgekehrt, wenn m = n: so ist das △ ABC ein gleichschenkliges.

Beweis von I. Man mache die willkührlichen Verlängerungen von AC, BC einander gleich, d. i. AD = BE, und ziehe AE, BD; so ist nun △ ACE = △ BCD (§. 35); also DB = EA, und D = E. Daher ist auch das △ ABD = △ ABE (§. 35.), folglich 1) der Winkel

*) Versuche über die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles, zum Theil mit einer Tertienuhr angestellt, geben, als Resultat, für 1″ 1038 auch 1040,3. par. Fuß. Daher der Schall ein Mittel, Weiten zu messen.

kel DAB=ABE; da auch i=o, und in den ersteren Dreyecken m+i=n+o: so ist auch 2) m=n (§. 40. Z. Einl.)

Bew. von II. Es sey der Winkel CAB=CBA (fig. 35.). Wäre nun AC nicht =BC: so wäre z. B. BC entweder < oder > AC. Im ersten Falle sey der Theil AD von AC gleich BC: so ist, wenn man BD zieht, △ABC=△ABD (§. 25.) d. i. das Ganze = dem Theile. Derselbe Widerspruch hat statt im zweyten angenommenen Falle; also ist AC=BC.

Zusatz 1. Zwey gleichen Winkeln eines Dreyeckes stehen zwey gleiche Seiten gegenüber.

Zusatz 2. Das gleichseitige Dreyeck ist auch ein gleichwinkliges (§. 33. Zus.), und umgekehrt (nach II); folglich ist sowohl das gleichseitige, als gleichwinklige Dreyeck eine reguläre Figur (§. 32.)

§. 40. Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreyeck über die gegebene Grundseite AB (fig. 34.) zu konstruiren.

Auflösung. Sowohl aus A als B beschreibe man mit einerley, beliebigem, Halbmesser Bogen fg, de, so, daß sie sich in einem Punkte C schneiden. Die aus diesem Durchschnittspunkte zu A und B gezogenen geraden Linien sind die Schenkel des zu konstruirenden Dreyeckes (§. 16. Zus. 1.).

§. 41. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ABC, DEF (fig. 36.) wechselseitig gleichseitig sind, so sind die gleichen Seiten entgegenstehenden Winkel, und die Dreyecke selbst einander gleich.

Be-

Beweis. Man lege irgend eine Seite z. B. DE des △ DEF über eine ihr gleiche Seite AB des △ ABC, so, daß E auf B, D auf A fällt, und das △ DEF eine dem △ ABC entgegengesetzte Lage erhält. Zieht man nun CF: so erhält man 2 gleichschenklige Dreyecke CFD, CFE (vermöge der Voraussetz.), folglich i = o, m = n (§. 39. I.); also i + m = o + n (§. 40. Z. Einl.); d. i. d. W. ACB = dem Winkel DFC.

Mittels ähnlicher Konstruktion demonstrirt man auf dieselbe Weise, daß der Winkel BAC = EDF und ABC = DEF ist. Weswegen denn auch jedesmal vermöge §. 35. die Gleichheit der Dreyecke selbst folgt.

§. 42. **Aufgabe. Ein dem △ ABC gleiches △ zu konstruiren.**

Auflösung. Man mache einen Theil einer geraden Linie DE = AB (§. 22.) Aus D mit dem Halmesser = AC und aus E mit dem Halbmesser = BC ziehe man die sich in F schneidenden Bogen, und aus diesem Punkte FD, FE.

§. 43. **Aufgabe. An einem gegebenen Punkte A der Linie AB (fig. 37.) einen dem gegebenen Winkel DCE gleichen Winkel zu bilden.**

Auflösung. Auf CD sowohl, als CE nimm willkührlich die Punkte D, E, ziehe DE, und verfahre nach §. 42; so ist A = C.

§. 44. Lehrsatz. **Wenn zwey gleichschenklige Dreyecke (fig. 38.) ABC, AFC oder ADC, einerley Grundseite AC haben: so halbirt die gerade Linie von einer Spitze zur andern, oder bis zur Grundseite verlän-**

gert

gert, die Winkel an den Spitzen, die gegebenen Dreyecke, imgleichen die Grundseite AC, und ist auf diese senkrecht.

Beweis. In den wechselseitig gleichseitigen Dreyecken BFA, BFC ist nach §. 41, 1) o=i, m=n; daher 2) nach §. 35. △ AOB = △ OCB, und △ AFO = △ CFO, folglich 3) AO=OC, und die Winkel um O gleich, folglich BO senkrecht (§. 29).

Eben so ist in den wechselseitig gleichseitigen Dreyecken ABD, CBD i=o und der Winkel ADB=CDB, folglich auch r=s (§. 30. Zus. 2.), u. s. w. wie vorhin.

§. 45. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel ABC (fig. 39.) zu halbiren.

Auflösung. Man schneide auf den Schenkeln gleiche Stücke BA, BC ab, und verfahre so, wie man ein gleichschenkliges Dreyeck über die gerade Linie von A nach C entweder gegen B oder E zu errichtet (§. 40); so halbirt dann BE den Winkel (§. 44).

Zusatz. Es erhellt, daß man einen Winkel in 4, 8, 16... gleiche Theile theilen könne, indem man die einzelnen Theile wieder halbirt.

Anmerkung.

Mechanisch theilt man einen Winkel in so viele gleiche Theile, als man will, indem man die zwischen seinen Schenkeln gezogenen Bogen in gleiche Theile theilt, und aus diesen Theilpunkten gerade Linien zum Scheitel des gegebenen Winkels zieht.

§. 46. Aufgabe. Eine gegebene Linie AB (fig. 40.) durch eine senkrechte zu halbiren.

Auf-

Auflösung. Man errichte zwey gleichschenklige Dreyecke über AB, entweder auf beyden Seiten, oder auf derselben Seite: die gerade Linie CD, oder im andern Falle, die gerade Linie Ci, bis O verlängert, ist senkrecht und halbirt AB in O (§. 44.).

§. 47. Aufgabe. Auf AB (fig. 40.) im Punkte O, oder im Endpunkte B (fig. 41.) eine senkrechte Linie zu errichten.

Auflösung. Im ersten Falle mache man AO = OB, und ziehe aus dem, wie bey den vorigen Auflösungen gefundenen, Punkte D oder C die gerade Linie zu O, welche das zu errichtende Loth ist. Im zweyten Falle verlängere man AB willkührlich, z. B. bis E, und mache BE = BD; das Uebrige, wie im vorigen Falle.

Geodäsie.

Diese Aufgabe lößt man auf dem Papiere mechanisch 1. mit Hilfe des Winkelhackens (Normae), dessen Erfinder nach Vitruv. c. 2. l. 9. Pythagoras seyn soll. Fig. 42. zeigt, wie man auf AF im Punkte G eine senkrechte Linie CG mittels des Winkelhackens BGC errichten, oder wie man nach der folgenden Aufgabe aus dem Punkte C auf AF eine senkrechte Linie fällen könne.

Mit Hilfe dieses Instruments findet man auch den Punkt c der Setzwage (§. 15. Geod.), indem man den einen Schenkel desselben genau an die Leiste AB (fig 8.) legt, und den andern Schenkel durch g gehen läßt; die an ihm herab gezogene Linie giebt den Punkt c auf der Leiste de.

2. Zu derselben Absicht bedient man sich zweyer hölzernen rechtwinkligen Dreyecke (fig. 43.) ABC,

EDF. Längst der Seite EF kann man senkrechte Linien auf GH fällen.

Um diese Instrumente zu prüfen, stelle man sich vor, AF (fig. 42.) sey die Schärfe eines richtigen Linials; an diese drücke man fest den einen Schenkel des Instruments an, und ziehe am andern herab die feine Linie CG. Dann kehre man das Instrument um, so, daß der Punkt B gegen F hinaus fällt, das Linial aber unverrückt bleibt. Trift nun der Schenkel GC mit der vorhin gezogenen Linie genau zusammen, oder ist er mit ihr gleichlaufend: so ist das Instrument richtig, oder BGC genau ein rechter Winkel. Eine andere Methode kömmt unten bey §. 88. vor.

§. 48. Aufgabe. Aus dem Punkt C (fig. 44.), der außerhalb AB liegt, auf diese ein Perpendikel zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus C mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher AB in 2 Punkten D und E schneidet; von diesen aus suche man, wie oben, den Punkt H, oder halbire DE nach §. 46; so ist CH das Loth (§. 44).

Sollte aber der Punkt C so über AB liegen (fig. 45.), daß man den einen oder andern Punkt D oder E nicht bemerken könnte: so verlängert man die gegebene Linie; das Uebrige bleibt.

Geodäsie.

Um Perpendikularlinien auf dem Felde zu ziehen, bedient man sich mit Vortheil des Kreutzmaßes fig. 46. Ein messingener kreisrunder Ring, BCGF, durch 2, unter rechten Winkeln im Mittelpunkte A sich schneidende, gerade Linien in 4 gleiche Theile getheilt, ruht ent-

entweder auf einem einfachen, oder auf einem Dreyfuße, wie fig. 27. auf dem das Instrument nach Willkühr bewegt und festgestellt werden kann. Am Endpunkte jeder jener 4 Linien befindet sich eine Diopter, auf ähnliche Art, wie bey fig. 24. erklärt worden.

Zur Prüfung des Kreutzmaßes läßt man in einer möglich größten Entfernung 2 Stäbe D, E in der Visirlinie GAB, FAC aufstellen; wendet dann das Instrument so, daß man in der Visirlinie FAC den Stab E erblickt, und sieht, ob die Visirlinie GAB genau auf D trift. Erblickt man nun die 2 Stäbe jedesmal, indem man auf diese Art das Instrument wendet: so kann man auf dessen Richtigkeit schließen.

Gebrauch. Im Punkte A ein Perpendikel auf die gerade Linie BE (fig. 47.) zu errichten.

Man stelle im Punkte A das Kreutzmaß auf, und, um B und E bemerkbarer zu machen, setze man hier senkrecht 2 Stäbe mit Fähnchen ein. Dann wende man das Instrument so, daß man durch die Diopter 1 den Stab E und durch 3 den Stab B erblickt. Dann sehe man, bey unverrückter Lage des Instruments, durch die Dioptern 4 und 2; sobald der Fuß C des Stabes DC, welchen ein Gehilfe zwischen 2 Fingern hält, und bald so, bald anders nach dem gegebenen Zeichen bewegt, in dieser Visirlinie erblickt wird: so lasse man den Stab senkrecht in den Boden setzen. Die Linie AC, die man dann willkührlich verlängern kann, ist das verlangte Perpendikel.

Beyspiel. Man soll die gerade Linie AB (fig. 48.) auf der Erde verlängern, ungeachtet eines Hindernißes, z. B. einer zwischen B und E befindlichen Mauer DF. Man errichte eine senkrechte Linie auf AB im Punkte B, die man so weit verlängert, bis man von ihrem Endpunkte C bey der Mauer wegsehen kann. Dann mache man den Winkel n gleich dem gemessenen Winkel m, messe in der Visirlinie CE, die mit BC jenen Winkel bildet, so

 weit

weit fort, daß CE = der gemessenen AC wird. E ist dann der Punkt, durch welchen die verlängerte AB gehen muß; denn die △ △ ABC, BCE sind gleich (§. 35, oder 37).

Wäre das Perpendikel blos im Endpunkte A der geraden Linie BA zu errichten: so bedürfte man nur des Stabes B.

Es ist nicht selten der Fall, daß man bey dieser Operation sein Instrument nicht auf den Punkt A stellen kann, in welchem das Loth zu errichten ist, z. B. wenn AE eine Mauer, ein lebendiger Zaun wäre. In diesem Falle setzt man in gleicher Entfernung von AE 2 Stäbe a, e und errichtet auf ae das Loth aD.

Anmerkung.

Die Fig. 49. zeigt, wie man dieses Instrument brauchen könne, eine gerade Linie ADMP auf Bergen und in Tiefen abzustecken.

§. 49. Lehrsatz. **Verlängert man irgend eine Seite AB des Dreyeckes ABC (fig. 50.): so ist der dadurch entstehende äußere Winkel CBD > BAC und > ACB, d. i. größer, als jeder seiner innern Gegenwinkel.**

Beweis. Halbirt man BC in E (§. 46.), zieht AE, macht deren Verlängerung EF = AE, und zieht FB: so erhält man 2 gleiche △ △ ACE, EFB (§. 35); also ist der Winkel ECA = EBF. Nun ist EBD oder CBD > EBF, folglich auch > ECA (oder > ACB).

Durch ähnliche Konstruktion (indem man AB halbirt) beweißt man, daß d. Winkel ABG (= CBD) > BAC ist.

§. 50. Lehrsatz. **In jedem △ ABC sind jede 2 Winkel zusammen < 2 R.**

Be-

Beweis. Zieht man AB fort: so ist $BAC < CBD$ (§. 49), folglich $BAC + ABC < CBD + ABC$; aber $CBD + ABC = 2R$ (§. 29. Zus. 1.), also $BAC + ABC < 2R$. Auf dieselbe Art wird dieß von den 2 andern Summen bewiesen.

Dritter Abschnitt

von den Parallellinien und Vierecken.

§. 51. Erklärung. Gerade (in derselben Ebene liegende) Linien, die ohne Aufhören verlängert, nicht zusammenstoßen, heißen Parallellinien. Nichtparallele Linien heißen nach der Seite, wo sie verlängert zusammenstoßen, konvergent, und nach der andern Seite divergent.

Wir bezeichnen die erstern durch ||, die nichtparallelen durch $\wedge$, und die gleichen und parallelen Linien durch ╫.

§ 52. Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien AB, CD (fig. 51.) von einer dritten EF so geschnitten werden, daß I. die Wechselwinkel m, n an der Sekante gleich sind; oder II. der äußere Winkel v dem innern, ihm an derselben Seite der Sekante liegenden Winkel n gleich ist; oder III. die beyden innern an derselben Seite der Sekante liegenden Winkel $n + r$ oder $m + s$ gleich sind $2R$: so sind jene Linien AB, CD parallel.

Be-

Beweis von I. Wäre AB $\wedge$ CD: so würden beyde verlängert endlich z. B. in G zusammenstoßen, folglich wäre m > n (§. 49).

Beweis von II. v = n (durch die Voraussſ.), v = m (§. 31. Zuſ.), also m = n, daher AB || CD (durch I.).

Beweis von III. n + r = 2R, m + r = 2R (§. 29. Zuſ. 1.), daher m + r = n + r, und m = n (§. 40. Z. Einl.), folglich AB || CD.

Zusatz. Also sind gerade Linien, welche auf derselben geraden Linie senkrecht sind, parallel.

§. 53. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt A (fig. 52.) außerhalb einer gegebenen Linie BC eine mit dieser parallele Linie zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe aus irgend einem Punkte der Linie BC z. B. von D die gerade Linie DA, und mache an der entgegengesetzten Seite dieser Linie einen dem Winkel n gleichen Winkel m (§. 28.), dessen Scheitel A ist. Der andere Schenkel dieses Winkels, nämlich AE, oder dessen Verlängerung EF ist nach §. 52. die mit BC zu ziehende Parallellinie.

Geodäsie.

Dieser Satz (mit §. 52.) zeigt deutlich die Möglichkeit der Parallellinien, die man sich dadurch mechanisch entsprungen denkt, daß die senkrechte Linie AB (fig. 53.) auf BC in derselben lothrechten Lage über BC fortbewegt wird; der äußerste Punkt A beschreibt dann die zu BC parallele Linie AD.

Aus

Aus dieser Vorstellungsart der Möglichkeit der Parallellinien geht zunächst die Vorstellung von Parallelen, als solcher geraden Linien hervor, welche in allen Punkten gleichweit voneinander abstehen, oder daß alle senkrechte Linien zwischen 2 Parallellinien einander gleich sind. — Die Richtigkeit dieser Vorstellungsart wird sich unten ergeben. — Will daher der Geodät auf dem Felde die Linie AD parallel zu BC ziehen, so, daß AD z. B. 20′ von BC absteht: so errichtet er in einem Punkte z. B. B eine senkrechte Linie BA=20′; eben so eine andere GF =20′. Die in A und F aufgestellten Stäbe zeigen dann die Richtung der mit BC parallelen Linie.

Soll in einer Ebene vom Punkte A aus eine Parallellinie zu BC gezogen werden: so errichte man das Loth AB auf BC (§. 48. Geod.) und eben so auf AB im Punkte A das Loth AD: so ist diese mit BC parallel (§. 52. Zus.)

Auf dem Papiere zieht man Parallellinien mechanisch, mit Hilfe des sogenannten Parallellinials fig. 54. oder richtiger mittels der 2 hölzernen Dreyecke ABC, DEF (fig. 55.), indem jede Linie, an der Schärfe DE, bey dem willkührlichen Verschieben des △ DEF, gezogen, parallel zu GH ist. Eine andere Methode zeigt die fig. 56., indem man nämlich von gegebenem Punkte C einen Bogen mn beschreibt, welcher die gegebene AB berührt, und mit demselben Halbmesser aus irgend einem Punkte F den Bogen rs. Die von C aus so gezogene Linie CE, daß sie rs berührt, wird parallel zu AB seyn.

§. 54. **Lehrsatz. Gerade Linien CD, AB (fig. 57. 58.), welche derselben geraden Linie EF parallel sind, sind unter sich parallel.**

Beweis. Es haben hier erstens zwey Fälle statt, nämlich die Vergleichungsparallele EF liegt I. entweder zwischen CD, AB, oder II. außerhalb derselben.

Zwei-

Zweytens. In beyden Fällen sind entweder (A) alle gerade Linien, wie sie der Satz ausspricht, einander parallel; oder (B) alle stoßen verlängert zusammen. Ein Drittes kann nicht Platz haben, daß nämlich nur einige gerade Linien einander parallel, einige aber verlängert zusammenstoßen. Denn auf dieselbe einfache Art, wie 2 gerade Linien gegen die Vergleichungsparallele bestimmt sind, sind zugleich alle bestimmt. Der Erfolg aus dieser Bestimmung muß daher für jede 2 gerade Linien derselbe seyn.

Nimmt man nun für Fall I. den dem Satze A konträr entgegengesetzten Satz B an, daß nämlich $AB \wedge CD$ sey; so wird uns dieser angenommene Satz aus und durch sich selbst auf einen Widerspruch führen. Denn ist $AB \wedge CD$: so stoßen diese genugsam verlängert entweder nach der Seite A, C oder B, D zusammen. Gesetzt, es geschähe dieß nach B, D: so fiele der Durchschnittspunkt G entweder unter die ausgezogene Linie EF, — dann wäre $CD \wedge EF$; oder über EF, — dann wäre $CD \wedge EF$; oder in dieselbe hinein, — dann wäre sowohl $CD \wedge EF$, als $AB \wedge EF$. Also kann nur der erste Satz A für Fall I. wahr seyn, d. i. $AB \parallel CD$, oder diese können nicht nach B, D, aber auch nicht nach A, C (was eben so bewiesen wird) zusammenstoßen.

Der Satz B auch für Fall II. (fig. 58.) als wahr angenommen, daß nämlich (bey der Voraussetzung, es sey $AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$) $AB \wedge CD$ sey: so wird, wenn $CD \wedge AB$ ist, irgend eine andere GH, durch irgend einen

nen Punkt I parallel mit AB zu ziehende Linie diese Parallellinie seyn.

Dieser Annahme zufolge ist

GH || AB (d. Konstr.)

EF || AB (d. Vorauss.)

also GH || EF (nach Fall I.)

Nun ist aber AB || EF (d. Vorauss.), also wäre dem angenommenen Satze B zufolge GH ∧ AB und doch auch (nach dem vorigen) GH || AB. Also ist der Satz A auch für den zweyten Fall wahr.

Anmerkung.

Euklid erwähnt bey prop. 30. l. 1. dieses zweyten Falles nicht ausdrücklich. Auch kann man ihn auf Fall I. zurückeführen, wenn man hier der Vorstellung von Lage und Bewegung gerader Linien (worauf jedoch Euklid nicht Rücksicht nahm) Platz geben will. Denn denkt man sich z. B. AB (fig. 58.) um CF, wie um eine fixe Axe gedreht: so kömmt EF in die Mitte, und AB bleibt mit ihr parallel. AB ist folglich auch mit CD parallel, da ihre nun größere Entfernung nichts ändern kann.

§. 55. Lehrsatz *). Wenn zwey gerade Linien AB, CD (fig. 59.) von einer dritten EF geschnitten werden, und die inneren an derselben Seite der Sekante liegenden Winkel m + n sind < 2 R: so konvergiren diese geraden Linien nach der Seite B, D, wo die kleineren Winkel liegen, und stoßen verlängert nach eben dieser Seite zusammen.

Be-

*) Euklids 11tes Axiom.

Beweis. Da $s + n$ ($= 2R$) $> m + n$: so ist $s > m$. Bildet man daher bey I den Winkel $m + v = s$ (§. 43.); so ist die verlängerte HI sowohl parallel mit AB (§. 52.), als eine Sekante von CD in I.

Nun ist $s + n = 2R = o + i + m$; also $s + n + o + i + m = 4R$. Aber $m + n < 2R$, daher $s + o + i > 2R$. Also stoßen AB, CD nicht nach der Seite A, C, wo die größeren Winkel liegen, zusammen (§. 50.). Würden nun diese Linien auch nicht nach der andern Seite konvergiren: so wäre CD || AB; aber auch GH || AB, also CD || GH (§. 54.), was widersprechend ist, indem letztere sich in I schneiden. Folglich stoßen AB, CD verlängert nach B, D zusammen.

§. 56. Lehrsatz. Wenn zwey Parallellinien CD, AB (fig. 57.) von einer geraden Linie EF geschnitten werden: so sind I. die Wechselwinkel einander gleich, $m = n$, $r = s$; II. der äußere Winkel $v =$ dem innern ihm an derselben Seite der Sekante entgegenstehenden Winkel n; III. die inneren Winkel an einerley Seite der Sekante gleich 2 rechten, $r + n$, oder $m + s = 2R$.

Beweis von I. Wäre m nicht $= n$: so müßte z. B. $m > n$ sein; folglich $m + r > n + r$. Aber $m + r = 2R$, also $n + r < 2R$, folglich würden CD, AB nicht parallel seyn (§. 55.).

Beweis von II. $v = m$ (§. 31. Zus.) und $m = n$, also $v = n$.

Bew. von III. $v = n$, also $v + r = n + r = 2R$.

Zusatz

Zusatz 1. Wenn von 2 Parallellinien AB, FG (fig. 53.) die eine FG auf BC senkrecht ist: so ist es auch die andere. Denn n = r = R.

Zusatz 2. Wenn eine gerade Linie FG (fig. 53.) auf einer von 2 Parallellinien AD, BC z. B. auf BC senkrecht ist; so ist sie auch senkrecht auf die andere AD. Denn n = m = R.

Zusatz 3. Alle senkrechte Linien zwischen 2 Parallellinien sind einander gleich. Denn denkt man sich von je 2 Punkten A, F zu je 2 andern B, G Perpendikel gezogen, und zieht AG; so ist o = i, indem AB, FG, als Parallellinien (§. 52. Zus.) geschnitten werden, also sind auch die Complementwinkel einander gleich (§. 30. Zus. 2.) und AG = AG, folglich die hier gebildeten △△ gleich, und AB = FG.

Anmerkung.

Eratosthenes (von Cyrene, ums J. 250. v. C. G. geb., der Cosmograph genannt) benützte diesen Lehrsatz zur Berechnung des Erdumfanges. Ihm war bekannt, daß zur Zeit der Sommersonnenwende (des längsten Tages) der Sonnenstral BS (fig. 60. 1te.) senkrecht auf den Horizont von Syene in S fiel. Plinius (hist. nat. lib. 2. c. 73) sagt: „tradunt in Syene oppido, quod est supra Alexandriam quinque millibus stadiorum, solstitii die medio nullam umbram jaci, puteumque ejus experimenti gratia factum totum illuminari. Ex quo apparere, tum solem illi loco supra verticem esse." — „In Syene, sagt Strabo (lib. XVII) puteus quidam est, qui aestivum indicat solstitium, quoniam haec loca circulo tropico sunt subjecta, et in meridie umbilicos faciunt sine umbra

umbra etc.“ Und Lucan (Pharsal. II. v. 586.) hat: „umbras nusquam flectente Syene.“— Nun beobachtete Eratosthenes zu Alexandria den Schatten der Mittagssonne am längsten Tage mit Hilfe des von den Alten σκαφη, oder σκαφιον genannten Instruments, welches aus einer hohlen Halbkugel ACB (fig. 60. 2te.) mit einem getheilten Halbkreise bestand, in deren Mitte C ein senkrechter Stift CD (gnomon) aufgerichtet war. Stellte man dieses Instrument an die Sonne, und richtete CD nach dem Scheitelpunkt Z eines Ortes: so gab die Länge des Schattens Ce, in Theilen des Kreises ausgedrückt, das Maß des Winkels CDe = ZDS d. i. den Abstand der Sonne vom Scheitel an. Diesen Schatten fand Er. = $\frac{1}{50}$ des Kreises d. i. = 7° 12′, oder er fand, daß der am längsten Tage auf den Horizont von Alexandria in A schief auffallende Sonnenstral DE mit dem Gnomon AD einen Winkel EDC = 7° 12′ bildete. Da er nun annahm, daß Alexandria unter demselben Meridian mit dem ungefehr 5000 Stadien entfernten Syene (aber nach Ptolemäus 1° 53′ ostwärts —) liege, und der Stral DE ad sensum parallel mit BS oder BC sey: so schloß Er., daß der Winkel EDC = DCB sey, dessen Maß der Meridianbogen AS = 5000 Stadien, daß folglich 7° 12′ : 360 = 5000 : 250000, d. i. der Erdumfang = 250000 Stadien sey. Allein die Ungewißheit, was für ein Stadium hier zum Grunde liege, macht es unmöglich, zu sagen, wie weit sich diese Zahl der wahren nähere. Indessen nehmen die meisten Mathematiker (z. B. Whiston — in suis prael. astron. Cantab. 1707. p. 19. —) an, daß sie zu groß sey. Nach Eratosthenes bestimmte zuerst Posidonius (aus Rhodus, im J. 66. v. Chr. Geb.) jenen Umfang zu 240000 griech. Stadien = 180000 alexandrinischen, deren jede nach Lulofs (beynahe eben so nach le Roy) = 685 par. Fuß, so, daß demnach der Erdumfang = 123300000 par. F. wäre, welche auch vom Ptolemäus ange-

angenommene Zahl von der in neuern Zeiten bestimmten = 123495300 (S. 244. Z.) wenig abweicht.

§. 57. Lehrsatz. In jedem △ ABC (fig. 61.) ist, wenn man eine seiner Seiten z. B. AB verlängert, I. der äußere Winkel CBE = der Summe der 2 innern ihm gegenüberliegenden Winkel n, s; II. die innern Winkel des Dreyecks sind zusammen 2 rechten gleich, $i + n + s = 2R$.

Beweis von I. Man ziehe BD ∥ AC (§. 53.) so ist $m = s$, $r = n$ (§. 50.), also $CBE = s + n$.

Beweis von II. $i + m + r = 2R = i + n + s$.

Zusatz 1. In jedem △ kann also nur ein rechter, oder ein stumpfer Winkel seyn (vergl. §. 33.), die übrigen Winkel sind dann spitz.

Zusatz 2. Weiß man einen Winkel des Dreyecks; so weiß man auch die Summe der übrigen; im rechtwinklig — gleichschenkligen △ ist jeder der spitzen Winkel = $\frac{1}{2}R$; im gleichseitigen oder gleichwinkligen ist jeder Winkel = 60°; im gleichschenkligen △ ist der äußere Winkel an der Spitze = dem doppelten innern an der Grundseite.

Zusatz 3. Wenn in 2 Dreyecken 2 Winkel wechselseitig gleich sind; so ist auch der dritte dem dritten gleich. Daher sind 2 △△ ABC, DEF (fig. 30.) gleich, wenn AB = DE, A = D, C = F ist, — eine Erweiterung des Lehrs. §. 37.

Zusatz 4. Werden diejenigen Dreyecke, welche dadurch entstehen, daß man in einem gleichseitigen △ parallele Linien mit einer Seite zieht, alle gleichseitig seyn?

Geo-

Geodäsie.

Die Höhe irgend eines Gegenstandes z. B. eines Thurmes (fig. 62.) mittels des Schattens zu messen (vergl. §. 65. Zus. 2.).

Ist die Sonne um 45° über den Horizont heraufgerückt: so ist die Länge des Thurmschattens BC gleich AB.

Da nun jene Sonnenhöhe der vom Mittelpunkte der Erde aus durch die Sonne auf den Horizont gezogene Bogen von 45° ist, die Erde aber in Beziehung auf den Abstand von der Sonne als Punkt betrachtet, folglich jeder Punkt der Erdoberfläche für jenen Mittelpunkt genommen werden kann: so findet man jene Sonnenhöhe, wenn man auf einer horizontalen Fläche mit willkührlichem Halbmesser eine Kreislinie verzeichnet, in deren Mittelpunkte man einen Stift von der Länge jenes Halbmessers lothrecht errichtet. Trift nun der Schatten des Stiftes die Kreislinie: so ist die Sonne 45° über den Horizont heraufgerückt. Denn ist BC der Schatten = der Länge des Stiftes AB: so ist der Winkel ACB = 45° (Zus. 2.), dessen Maß der von C aus zwischen dem bis zur Sonne verlängerten Sonnenstral CD und der verlängerten horizontalen Linie BC gezogene Bogen ist, welcher folglich = 45° seyn muß.

Anmerkung.

Nach dem Zeugnisse des Eudemus, eines alten Geometers, soll Pythagoras der Erfinder dieses fruchtbaren Lehrsatzes seyn, mittels dessen wir die Summe der innern und äußeren Winkel der Polygone überhaupt bestimmen, wie nachfolgt.

Auch für die Astronomie ist dieser Satz von unmittelbarer Anwendung, nämlich die Parallaxe, oder die Differenz des wahren und scheinbaren Ortes eines Gestirns zu bestimmen.

Es stelle (fig. 63.) HZW das hohle mit der Erde T konzentrische Himmelsgewölbe vor, wohin wir alles Gestirn referiren. Ein Stern in S stehe vom Scheitelpunkte Z des Beobachters in B um den Bogen SZ, dem Maße des Winkels SCZ ab, und sey bekannt. Für den Beobachter in B ist aber der Winkel SBZ das Maß dieses Abstandes des Sternes vom Zenith; dieser ist also der scheinbare, jener der wahre Abstand. Um wieviel daher SBZ > SCZ, um soviel ist der wahre Ort des Gestirns verschoben. Diesen Unterschied giebt der Winkel BSC. Denn der Winkel SBZ = BCS + BSC (Lehrs. I.). Zieht man daher den durch Computation bekannten Winkel C von dem durch Beobachtung bekannten Winkel SBZ ab; so hat man die Parallaxe (angulum parallacticum BSC).

§. 58. Lehrsatz. I. Die innern Winkel jedes Polygons von n Seiten sind = 2Rn — 4R; II. die äusseren Winkel jedes Polygons = 4R. *)

Beweis v. I. Zieht man entweder von einem innerhalb des Polygons angenommenen Punkte O. (fig. 64.) nach allen Ecken, oder von derselben Ecke A (fig. 65.) nach den gegenüberliegenden Ecken gerade Linien: so erhält man im 1ten Falle n, im 2ten n—2 Dreyecke. In beyden Fällen erhellt mittels §. 57. die Wahrheit des Satzes.

Beweis v. II. Zieht man die Seiten des Polygons (fig. 65.) fort: so entstehen n äußere Winkel, die mit den inneren n. 2R ausmachen. Folglich 2Rn — (2Rn —4R) = 4R = der Summe der äußeren Winkel.

Zu-

*) Polygone mit einwärts gehenden Winkeln, sind hier von der Betrachtung ausgeschlossen.

Zusatz 1. Also ist in jedem regulären Vieleck (§. 32.) jeder Winkel $= 2R - \frac{1}{n} 4R$; z. B. jeder Winkel ist im regulären Fünfeck $= 180° - \frac{1}{5} 360 = 108°$, im regulären Hexagon $= 120°$ u. s. w.

Zusatz 2. Also sind die innern Winkel einer 4seitigen Figur zusammen 4R.

§. 59. Lehrsatz. Wenn man in gleichschenkligem Dreyecke ABC (fig. 66.) den Schenkel BC verlängert, bis CD = BC wird: so ist DA senkrecht auf AB.

Beweis. $m = n$, $o = i$ (§. 39); also $m + o$ (= DAB) $= n + i$, folglich DAB + n + i = 2DAB = 2R (§. 57. II.), d. i. DAB = R, also DA senkrecht.

§. 60. Aufgabe. Auf AB im Endpunkte A ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung. Man errichte über AB das gleichschenkliche △ ABC (§. 40.), mache die verlängerte CD = CB: so ist die von D nach A gezogene gerade Linie auf AB im Punkte A senkrecht.

Geodäsie.

Soll der Geodät diese Aufgabe lösen: so setzt er in A und B die beyden Kettenstäbe, oder befestigt bey A und B die beyden Enden einer Meßschnur. Indem er nun mit dem Mittel der Kette oder Schnur fortgeht, bis beyde Hälften angespannt sind, setzt er bey C, wohin das Mittel trift, einen Stab, und bringt die eine Hälfte in der Richtung CB nach D, so, daß sich die Stäbe D, C, B decken. D ist dann ein Punkt des auf AB im Punkte A zu errichtenden Lothes.

§. 61. Lehrsatz. In jedem Dreyecke ABC (fig. 67.) ist der Winkel ACB, welcher einer größern Seite AB gegenüberliegt, > CBA, welcher einer kleinern Seite AC gegenüberliegt; und II umgekehrt, die größere Seite liegt dem größeren Winkel gegenüber.

Beweis von I. Man mache einen Theil AD von AB gleich AC (§. 22.), und ziehe CD: so ist m = n (§. 39.) Aber n = B + i (§. 57. I.) also n oder m > B, um so mehr ACB > B.

Bew. von II. Es sey ACB > B; so wird auch AB > AC seyn. Denn wäre 1) AB = AC; so wäre ACB = B; wäre 2) AC > AB, so widerspräche dieses dem Satze I. Also rc.

Zusatz. In rechtwinkligem △ ist die Hypotenuse (§. 33.) die größte Seite, und in ungleichseitigem △ sind alle Winkel ungleich.

§. 62. Lehrsatz. In jedem Dreyecke ABC (fig. 68.) sind je 2 Seiten z. B. AC + CB >, als die dritte AB.

Beweis. Man verlängere AC nach D, so, daß CD = CB wird. Da nun D = CBD (§. 39.), folglich ABD > D: so ist auch AD (= AC + CD) > AB (§. 61. II), also AC + CB > AB.

Anmerkung.

Hieraus ist klar, warum der Halbmesser, mit welchem §. 40. die Bogen gezogen werden, größer als die Hälfte der gegebenen Grundseite seyn muß, wenn sie sich schneiden sollen.

§. 63. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ACB, ADB (fig. 69.) die Seite AB gemein haben, und die Spitze D des einen innerhalb dem andern liegt: so ist der untere Winkel ADB > ACB, aber die Summe der beyden obern Seiten AC + BC > als die Summe der beyden untern, AD, DB.

Beweis. Man verlängere AD, bis BC in E geschnitten wird: so ist m > n, n > C (§. 49.) um so mehr ADB > ACB.

2.) AC + CE > AD + DE, und BE + DE > DB (§. 62.) folglich AC + CE + BE + DE > AD + DE + DB; also AC + CE + BE > AD + DB.

§. 64. Erkl. Die kürzeste Linie von einem Punkte nach einem andern, oder nach einer Linie, oder Fläche, heißt der Abstand, Entfernung, oder Weite des Punktes vom andern u. s. w. Ist der Abstand zweyer Punkte von einem Punkte oder einer Linie, oder Fläche, gleich groß; so sagt man: die beyden Punkte stehen von ihnen gleich weit ab oder sind ihnen gleich nahe (aequidistant). Nimmt man irgend eine Seite eines Dreyeckes als Grundlinie an; so ist ihr Abstand von der Spitze des △ dessen Höhe.

§. 65. Lehrsatz. Die gerade Linie von A nach B (fig. 70.) ist kleiner als jede geradgebrochene, die von A nach B möglich ist.

Beweis. Gesetzt, es sey dieß von einer geradgebrochenen Linie von n Theilen, von ACDEF wahr: so

so ist es auch von einer andern von n + 1 Theilen, von ACDEFB wahr. Denn ist AB < ACDE + EB: so ist, weil EB < EF + FB (§. 62.), um so mehr AB < ACDE + EF + FB. Nun gilt aber der Satz, wenn die geradgebrochene Linie aus 2 Theilen AC, CB besteht (§. 62.), also auch, wenn sie aus 2 + 1, also auch, wenn sie aus 3 + 1 ..., und überhaupt wenn sie aus noch so vielen Theilen besteht.

Zusatz 1. Da man die krumme, folglich auch die gemischte Linie (§. 9.) auf eine geradgebrochene zurückeführen kann (§. 19. Zus. 2): so ist unter allen von A zu B möglichen Linien die gerade AB die kürzeste, oder kleinste. Durch sie ist also der Abstand des Punktes A von B bestimmt (§. 64).

Zusatz 2. Unter allen geraden Linien, welche von C (fig. 71.) nach AB möglich sind, ist die senkrechte CD die kürzeste. Denn jede andere z. B. CE, CF, ist > CD (§. 61. Zus.). Also wird die Höhe des Dreyeckes (§. 64.) durch das Perpendikel, welches man von der Spitze auf die Grundlinie, oder deren Verlängerung fallen läßt, gemessen. So ist fig. 72. AB als Grundlinie genommen, Cd die Höhe des △ ABC ꝛc.

Zusatz 3. Also stehen zwey Parallellinien in allen ihren Punkten gleichweit voneinander ab (§. 56. Zus. 3.), und umgekehrt, stehen zwey Punkte A, F (fig. 53.) einer geraden Linie ED von einer andern HC gleichweit ab: so ist HC || ED. Denn fällt man aus A, F die Lothe AB, FG und zieht AG: so ist o = i (§. 52.

Zus. §. 56.) AB = FG (vermöge der Vorauss.), AG = AG; also △ ABG = △ AFG (§. 35.) folglich d. W. FAG = AGB, also HC ‖ ED (§. 52. I.)

Zusatz 4. Zwey (unter den oben für die Gleichheit der △△ angegebenen Bedingungen) gleiche Dreyecke ABC, abc (fig. 73.) haben gleiche Höhen BE = be. Denn m = R = n, A = a, AB = ab. — Eben so, wenn AB, ab die Grundlinien sind, ist D = d, und, weil B = b, d. W. CBD = cbd, BC = bc.

§. 66. Eintheilung der Vierecke mit hohlen Winkeln *) (§. 29), und Erklärung derselben. Dahin gehören:

I. Das Quadrat, eine Figur mit vier gleichen Seiten und lauter rechten Winkeln, fig. 74.

II. Der Rhombus (Raute), eine Figur mit vier gleichen Seiten, aber lauter schiefen Winkeln, fig. 75.

III. Das Oblong, auch schlechtweg das Rechteck, eine Figur mit blos entgegengesetzten gleichen Seiten, und lauter rechten Winkeln, fig. 76.

IV. Das Rhomboid (rhomboides, längliche Raute), eine Figur mit entgegengesetzten gleichen Seiten, und schiefen Winkeln, fig. 77.

§. 67. Erkl. Ein Viereck, in welchem jedes Paar entgegengesetzte Seiten parallel ist, heißt ein Parallelogramm. Eine senkrechte Linie von einer Parallele zur andern heißt die Höhe, und die Seite, worauf das

*) Vierecke mit erhabenen Winkeln, wie fig. 80. berücksichtigen wir hier nicht.

das Loth fällt, die Grundlinie des Parallelogramms. Ein Viereck, in welchem blos ein Paar Seiten parallel sind, heißt ein Trapez, (trapezium), fig. 78.; ist keine Seite der andern parallel: so ist das Viereck ein Trapezoid (trapezoides), fig. 79.

Zusatz 1. Also sind die im §. 66. genannten Vierecke Parallelogramme. Denn zieht man in ihnen die Diagonale AD; so erhält man in jedem 2 wechselseitig gleichseitige Dreyecke ACD, ABD, wo folglich die Wechselwinkel an der gemeinschaftlichen Seite AD gleich sind, folglich CD || AB, und AC || BD ist (§. 52. I.).

Zusatz 2. Die Höhe des Parallelogramms und Trapezs bleibt dieselbe, aus welchem Punkte der einen Parallele man auch die senkrechte Linie auf die andere fallen läßt (§. 65. Zus. 3).

§. 68. Aufgabe I. Ueber eine gegebene Grundlinie AB (fig. 74.) ein Quadrat, welches AB zur Seite hat, zu beschreiben.

II. Es ist eine gerade Linie AB (fig. 75.) und ein schiefer Winkel gegeben, eine Raute zu beschreiben, welche diesen Winkel und jene Linie zur Seite hat.

III. Es sind 2 ungleiche Linien gegeben, ein Rechteck zu beschreiben, welches jene Linien zu Seiten hat.

IV. Es sind 2 ungleiche Linien und ein schiefer Winkel gegeben, eine längliche Raute zu beschreiben.

V. Man soll ein Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboides oder Viereck überhaupt verzeichnen, das einem gegebenen gleich ist.

Auf-

Auflösung. Diese ist für alle Aufgaben leicht zu finden.

§. 69. Lehrsatz I. Die Diagonale theilt das Parallelogramm in 2 gleiche Dreyecke; II. im Parallelogramm ist jedes Paar entgegengesetzte Seiten und Winkel gleich.

Beweis von I. In jedem der vorhin genannten Parallelogrammen haben die Dreyecke die Diagonale AD zur gemeinschaftlichen Seite, und die Wechselwinkel gleich, m = n r = s (fig. 77.) nach §. 56. Also ꝛc.

Beweis von II. 1) ist AB = CD, AC = BD (durch I.); 2) B = C, ebenfalls aus I, und durch Addition der gleichen Winkel m = n, r = s, auch A = D.

Zusatz 1. Parallellinien zwischen 2 andern sind gleich. Denn sie bilden mit diesen ein Parallelogramm.

Zusatz 2. Zwey gerade Linien AC, BD (fig. 77), welche 2 gleiche Parallellinien AB, CD in ihren Endpunkten verbinden, sind selbst gleiche Parallelen. Denn zieht man AD: so ist △ ACD = △ ABD, weil m = n (§. 56.), CD = AB, AD = AD; folglich r = s, also AC ⋕ BD.

Zusatz 3. Wenn 2 gleiche gerade Linien 2 andere gleiche gerade Linien an ihren Endpunkten verbinden, so bilden sie miteinander ein Parallelogramm, wie leicht erhellt.

Geodäsie.

Die Höhe PM eines Berges (fig. 82) zu messen.

Die hier begreifliche Methode, dieses zu thun, besteht darin, daß man mehrere mit PM, oder deren ein-

einzelnen Theilen PO, ON .. parallele Linien FD, DC... erhält, welche mit den vorigen Theilen Seiten von Parallelogrammen, folglich einander gleich sind. Hiezu bedient man sich nun der Wasserwage (librae s. libellae aquaticae), fig. 81. Dieses Instrument besteht aus einer Röhre oder einem cylindrischen Gefäße GH von weißem Eisen- oder Messing-Blech, von etwa 4′ in der Länge und 3″ im Durchmesser. Die etwa 7″ langen Enden dieser Röhre sind senkrecht umgebogen, in diesen sind 2 sehr durchsichtige Glasröhren festgemacht, welche ungefehr 7 — 8″ bey A, C, hervorragen. In der Mitte bey B ist eine andere auf GH senkrechte Röhre, in welche das cylindrische Stück BD paßt, welches auf einem Dreyfuße ruht. — In eine der gläsernen Röhren wird Wasser gegossen, so, daß es etwa 2 Drittheile jeder gläsernen Röhre bedeckt. Steht die Flüssigkeit in beyden gläsernen Röhren gleichhoch, (was man am schärfsten mittels einer an beyden Röhren angebrachten Skale sehen kann): so steht die Wasserwage genau Horizontal, daher je zwey Visirlinien FP, DE .. parallel sind. Werden dann auch mittels des Lothes die Stäbe EF, CD .. genau senkrecht gestellt: so erhält man, indem man den Berg herab, von Station zu Station, dieselbe Operation fortsetzt, lauter Parallelogramme EP, CO ... Das Maß der Stäbe zusammengenommen ist dann die gemessene Höhe PM.

Um der Visirlinie selbst mehr Richtigkeit und Schärfe zu geben, bringt man bisweilen zwey bewegliche Diopten an den Enden A, C an, welche man auf beyden Seiten genau in der Wasserhöhe feststellt.

Anmerkung.

Würden die Pflanzen senkrecht auf dem Abhange eines Hügels, Berges wie in a (fig. 83.) wachsen, nicht aber vertikal, wie in A; so würden offenbar auf dem

Abhange AaB mehrere Pflanzen stehen können, als auf der horizontalen Ebene AB. Durch zufällige Umstände ist die Fruchtbarkeit der letzten sogar größer, als die des ersten. Daher der Feldmesser die Grundstücke auf einer geneigten Ebene nicht nach ihrem wahren, sondern nach ihrem auf eine horizontale Ebene reduzirten Flächenraum auszumessen hat, wenn es auf die Schätzung ihrer Fruchtbarkeit ankömmt (s. unten §. 137. Geod. nro. 4).

§. 70. Lehrsatz. **I. Parallelogramme, die einerley Grundlinie haben, und zwischen denselben Parallelen liegen, sind einander gleich. II. Dasselbe gilt unter denselben Bedingungen von Dreyecken. III. Das Dreyeck ist die Hälfte des Parallelogramms, welches mit ihm einerley Grundlinie hat, und zwischen denselben Parallellinien liegt.**

Beweis von I. Es sind hier 3 Fälle möglich, je nachdem (1) die der gemeinschaftlichen Grundlinie AB (fig. 84.) entgegengesetzten Seiten DE, EC der Parallelogramme AE, AC eine gerade Linie so bilden, daß der Endpunkt der einen Seite der Anfangspunkt der andern ist; oder beyde Seiten CE, FD (fig. 85.) der Parallelogramme AE, AD entweder (2) ganz, oder (3) nur zum Theil außereinander fallen, wie die Seiten CD, EF (fig. 86.) der Parallelogramme AD, AF. Im ersten Falle ist $x = y = z$ (§. 69. I.); also $x + y = y + z$. Im zweyten Falle sind die △△ ACF, EBD wechselseitig gleichseitig, folglich, wenn man von ihnen den Theil EOF wegnimmt, und zu den dann gleichen Trapezen CO, FB den Theil AOB hinzuthut,

thut, die Parallelogramme gleich. Im dritten Falle wird der Beweis auf ähnliche Art geführt.

Beweis von II. Es seyn die Dreyecke ABC, ADC; zieht man CE || AB, CF || AD: so sind jene △△ die Hälften gleicher Parallelogramme, also gleich.

Beweis von III. Es sey ABC das Dreyeck (fig. 88), AE das Parallelogramm; zieht man BF || AC: so ist das △ ABC die Hälfte des dem Parallelogramm AE gleichen Parallelogramms AF.

Zusatz 1. Auch sind sowohl Parallelogramme als Dreyecke gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben. Denn denkt man sie sich an den gleichen Grundlinien aufeinandergelegt, so fallen sie, wegen ihrer gleichen Höhen, innerhalb denselben Parallelen.

Zusatz 2. Mehrere Dreyecke von gleicher Höhe sind also einem einzigen Dreyecke gleich, dessen Grundlinie = der Summe jener Grundlinien, und dessen Höhe dieselbe ist, wie die eines jeden der Dreyecke. Denn ist Co (fig. 123.) diese Höhe für jedes Dreyeck ACB, BCD ... und aC = Co; ab = AB, bd = BD ꝛc., so ist jedes einzelne Dreyeck im △ a Ch gleich jedem entsprechenden einzelnen ACB, BCD ꝛc., also ꝛc.

Zusatz 3. Aehnliches gilt daher auch von den Parallelogrammen.

Zusatz 4. Begrenzte Räume können also einerley Quantität haben, ohne daß die Grenze des einen auf die Grenze des andern fällt, oder, ohne daß sie kongruiren, wie die vorigen figg. deutlich zeigen.

An-

Anmerkung.

So leitet die Geometrie selbst von der ursprünglichen intuitiven Vorstellung von Kongruenz auf die logische Bildung des richtigen Begriffes derselben. Nämlich „2 Dinge kongruiren" heißt: „sie haben einerley Quantität und Qualität." Hieraus erhellt auf logische Art ferner, daß man von der Kongruenz wohl auf die Gleichheit, aber nicht umgekehrt schließen könne.

Neuere Mathematiker wie Schulz, Lorenz.., indem sie diesen Begriff von Kongruenz voraussetzen, ignoriren das Euklid'sche Axiom (§. 8.), welches uns dieses, blos auf analytische Weise gebildeten Begriffes und der auf ihn gebauten Schlüsse überhebt. Daß aber durch die Methode jener Mathematiker die Geometrie an Evidenz nichts gewonnen, vielmehr verloren habe, beweisen ihre Lehrbücher.

Indessen können wir auf ähnliche Art, wie wir z. B. im §. 57. Zus. 3. thaten, und überhaupt häufig geschieht, auf diesen richtigen Begriff von Kongruenz (nämlich, zwey Dinge kongruiren, wenn sie gleich und ähnlich sind,) uns nun stützend, zurückeschließen, daß alle Linien, Winkel, Figuren, deren Gleichheit wir oben in den §§. 35. 37. aus dem Zusammenfallen ihrer Grenzen bewiesen haben, nicht nur gleich, sondern auch ähnlich sind. Dasselbe gilt von allen Figuren, deren Gleichheit wir mittels jener Lehrsätze dargethan haben, wie von allen diesen Lehrsätzen entsprechenden Problemen. *) Aber in Ansehung der Kongruenz der Vierecke gilt folgender Lehrsatz:

§. 71. **Lehrsatz.** Wenn I in zwey Vierecken AD, ad (fig. 89) alle Seiten nach der Reihe gleich sind, AC = ac, CD = cd, DB = db, BA = ba, und

*) Das Zeichen von Kongruenz ist ≅.

und der zwischen zwey gleichnamigen Seiten eingeschlossene Winkel gleich ist, z. B. C = c, oder II. wenn statt dieser letzten Gleichheit die Diagonalen AD, ad gleich sind; so sind die Vierecke kongruent.

Beweis von I. Man bringe das Viereck ad über AD so, daß der Punkt a auf A und c auf C fällt; so kongruirt auch, wegen C = c, die Seite cd mit CD und der Punkt d mit D, folglich auch die Diagonale ad mit AD (§. 35.), folglich kongruiren auch die △△ abd, ABD (§. 41.); also das Viereck AD ≅ ad.

Beweis von II. Dieser erhellt nun von selbst.

§. 72. Aufgabe. Ein schiefwinkliges Parallelogramm AD (fig. 85.), oder Dreyeck ACD (fig. 87) in ein rechtwinkliges, das ihm gleich ist, und überhaupt in ein anderes gleiche unter einem gegebenen Winkel CAB (fig. 88.) zu verwandeln.

Auflösung. Man errichte im Punkte B ein Perpendikel (§. 47. oder §. 60.), und ziehe durch A eine mit ihm parallele Linie AC (§. 53.), beyde begrenzt durch die verlängerte DF; so ist AE = AD (§. 70).

Auf ähnliche Art verfährt man in Beziehung auf die Verwandlung des Dreyeckes. — Und überhaupt: man mache DAB = CAB (§. 28), ziehe BF || AC und ED verlängert nach C.

§. 73. Aufgabe. Ein Parallelogramm AF (fig. 90) in ein ihm gleiches Dreyeck ACD zu verwandeln, und umgekehrt.

Auf-

Auflösung. Diese, wie ihre Richtigkeit erhellt leicht aus der Ansicht der Figur.

§. 74. Aufgabe. Ein Polygon überhaupt von n Seiten, in ein anderes von n—1 Seiten zu verwandeln (fig. 91).

Auflösung. Man übergehe die Ecke F, und ziehe GE, dieser parallel FK, begrenzt durch die Verlängerung GK, und EK; so kann nun, weil △FEG=△KEG, (§. 70. II.) der außerhalb EK liegende Theil des Polygons weggelassen werden, und statt der 2 Seiten GF, FE hat man eine EK.

Zusatz. Setzt man dieselbe Operation fort, wie in der fig.; so verwandelt man das Polygon AGFEDCBA in ein ihm gleiches Dreyeck KEL.

§. 75. Lehrsatz. In jedem Parallelogramm AC (fig. 92.) sind die Parallelogramme X, Y, welche mit denen um die Diagonale DB liegenden LF, EK, jenes ergänzen, einander gleich.

Beweis. Dieser ist mittels §. 69. leicht zu führen.

§. 76. Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm Y in ein anderes ihm gleiches unter der gegebenen Linie BL zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe Er fort bis in F, so, daß rF=LB, und ziehe FB. Man verlängere unbestimmt die Diagonale Br, begrenzt durch die fortgezogene Seite AE in D. Ergänzt man nun Dr, DF, so ist X=Y.

§. 77. Aufgabe. Mehrere geradlinige Figuren in ein Parallelogramm zu verwandeln, das den Flächenraum aller hat.

Auflösung. Da man jedes Vieleck in ein gleiches Dreyeck (§. 74. Zus.), jedes Dreyeck in ein gleiches Parallelogramm (§. 73.) und jedes Parallelogramm in ein anderes gleiches unter einem gegebenen Winkel (§. 72.) und dieses nach §. 76. verwandeln kann: so hat man, wenn diese so verwandelte Figuren an ihrer gleichen Seite aufeinandergesetzt werden, das verlangte Parallelogramm.

§. 78. Aufgabe. Ein Dreyeck in ein anderes gleiches zu verwandeln, dessen Spitze an einem gegebenen Punkte D liegt.

Auflösung. Es liege erstens dieser Punkt in einer Seite AC des △ ABC (fig. 93. 1te.). Man ziehe unbestimmt CG || AB, begrenzt von BG || AC; durch D ziehe man DE || AB oder CG, und durch A und E indefinit AH durch die verlängerte CG in H begrenzt. Zieht man endlich durch H die Linie HF || GB und durch die verlängerte AB in F begrenzt: so ist △ ADF = $\frac{1}{2}$ Ah = $\frac{1}{2}$ AG (§. 75.) = △ ACB.

Liegt zweytens D innerhalb dem Dreyecke (fig. 2te.): so ziehe man durch C mit AB || CG; durch D und A die gerade Linie AE, und endlich EB: so hat man den vorigen Fall.

Liegt drittens der Punkt D oberhalb der Spitze des △ ABC (fig. 3te): so ziehe man AL || BC, und

DB:

DB: so ist, wenn man durch den Durchschnittspunkt E zu C die gerade Linie EC zieht, △ BEC = △ ABC (§. 70). Zieht man nun DC, dieser parallel EF, und DF: so ist △ BDF = △ BEC (denn △ ECD = △ CDF, folglich EoD = FoC) = △ ABC.

Geodäsie.

Aufgaben über die Theilung der Figuren in gleiche Theile. I. Das Dreyeck ABC (fig. 94.) z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile AB in 3 gleiche Theile (s. bey §. 24. Geod.), und ziehe DC, EC: so sind die dadurch entstandnen Dreyecke gleich (§. 70. Zus. 1).

II. Das Parallelogramm AB (fig. 95.) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile in eben soviel gleiche Theile z. B. die Seite AC, und ziehe aus den Theilungspunkten die Parallellinien 1 l, 2 m...

III. Ein Trapez AC (fig. 96.) z. B. in 4 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. In soviel Theile theile man beyde parallele Seiten: so ist Ae = Ef ꝛc. Denn denkt man sich die Theilungslinien bis zum gemeinschaftlichen Punkte fortgezogen: so entstehen größere und kleinere gleiche Dreyecke. Diese von den ersteren abgezogen, lassen die gleichen Stücke Ae, Ef übrig.

IV. Ein Trapez, dessen Grundlinie AC (fig. 97.) in 3 ungleiche Theile AM, MN, NC getheilt ist, durch die Punkte M, N in 3 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. Man theile jede parallele Seite in 3 gleiche Theile in c, d, e, f; so theilen, wie vorhin, ce, df das Trapez in 3 gleiche Theile. Man ziehe cM, dieser parallel he, und die Diagonale Mh: so ist das Viereck AMhD (= AecD (denn i = r, hc = eM ꝛc. also △ hoc = △ eoM)) der dritte Theil; u. s. w.

V. Ein

V. Ein Trapezoid ACDB (fig. 98.) z. B. in 2 gleiche Theile zu theilen. — Aufl. 1. Man ziehe Ce || AB, theile beyde in h und k, und ziehe hk, kD; so ist das Viereck BDkh die Hälfte des Trapezoids, indem jenes aus dem Trapez, hkeB = $\frac{1}{2}$ ACeB, und dem △ keD = $\frac{1}{2}$ CDe besteht. — Zieht man nun Dh, durch k die Parallel kf, und hf: so ist das weniger irreguläre Viereck DfhB = dem vorigen BDkh, weil das △ Dhf = △ Dhk.

Es erhellt, daß, wenn das Trapezoid in 3 gleiche Theile hätte getheilt werden sollen, h, k dritte Theilungspunkte gewesen wären, folglich DfhB der dritte Theil; daß man daher das Trapezoid ACfh, gerade so, wie vorhin das Ganze, noch in 2 gleiche Theile hätte theilen müssen.

Aufl. 2. Man verwandelt ACDB (fig. 99.) in ein gleiches Dreyeck ACF (§. 74.), theilt die Grundlinie AB in die verlangte 3 Theile in d, e und zieht Cd, Ce. Sollen nun die Theilungslinien des Trapezoids durch h, l, gehen: so zieht man Ch, Cl, jener gd, dieser me parallel; so sind nun hg, lm die Linien, welche ACDB in 3 gleiche Theile theilen. Denn CghA = △ ACd (wegen der gleichen Dreyecke Chg, Chd (§. 70.)) = $\frac{1}{3}$ ACF = $\frac{1}{3}$ ACDB. Eben so ist CmlA = △ ACe, daher das Trapezoid mDBl, gleich dem △ Cfe seyn wird.

Es ist bisweilen der Fall, daß ein Terrein so muß getheilt werden, daß z. B. in jedem Erbstücke ein Brunnen, ein Haus, ein Felsen . . . liegt, damit nicht einer der Theilnehmer die Lasten allein tragen müsse. Daher muß der Geodät die Theilung bisweilen auch aus dem Winkel der Figur, oder selbst von einem innerhalb derselben liegenden Punkte aus vornehmen. Daher folgende Aufg.

VI. Ein

VI. Ein Viereck CA (fig. 100.) z. B. in 3 gleiche Theile aus der Ecke D zu theilen. — Aufl. Man ziehe die Diagonalen CA, DA, die dem W. D entgegengesetzte theile man in 3 gleiche Theile, und ziehe sowohl cd, als ab || DB; so theilen Dc, Da das Viereck in 3 gleiche Theile. Denn denkt man sich Db, Bb gezogen, so ist das △ BbA = $\frac{1}{3}$ CAB, und △ ADb = $\frac{1}{3}$ CDA; also BbA + ADb = $\frac{1}{3}$ des Ganzen = aDA.

VII. Ein Viereck mit einem erhabenen Winkel ACB (fig. 101.) in 4 gleiche Theile vom Winkel A aus zu theilen. — Aufl. Man ziehe BD, die man, wie eine Diagonale, in 4 gleiche Theile theilt in den Punkten k, i, h. Man ziehe die Diagonale AC, dieser parallel he, if, kg: so werden Ae, Af, Ag die Theilungslinien seyn. — Denn zieht man Ah, Ch, Ai, Ak; so ist jedes Dreyeck DAk, kAi ... der 4te Theil des ganzen △ DAB; eben so das kleinere △ DCk = $\frac{1}{4}$ △ DCB. Daher z. B. △ BAh — △ BCh = $\frac{1}{4}$ des Vierecks. Aber △ Aeh = △ eCh (weil sie einerley Grundlinie he haben, und zwischen denselben Parallelen he, AC liegen); folglich, Aeh + Beh = BCh; daher BAh — Aeh — Beh = BAe = $\frac{1}{4}$ ABCD. Auf dieselbe Art beweist man, daß z. B. auch DAg der 4te Theil des Vierecks ist.

VIII. Das Pentagon AiBCO (fig. 102.) in 3 gleiche Theile durch gerade Linien, vom Punkte F aus gezogen, so zu theilen, daß AF eine dieser Theilungslinien ist. — Aufl. Man verwandle diese Figur in das gleiche Dreyeck FGH (§§. 74. 78.); theile die Grundseite GH in 3 gleiche Theile, deren einer HD. Diesen trage man auf Ak, so ist △ AkF = $\frac{1}{3}$ △ FGH. Man ziehe Fi, dieser parallel ke und eF: so ist △ eFi = △ kFi, folglich das Viereck AFei der 3te Theil des Pentagons.

Man

Man mache Al = Ak: so ist △ AlF = △ AkF = $\frac{1}{3}$ FGH. Zieht man nun AO fort, und lm ∥ AF, und Fm: so ist △ AFm = △ AFl. Man ziehe endlich FO, dieser parallel mn, die gerade Linie Fn, so wird das Viereck AFnO = △ AFl seyn.

Anmerkung.

Die Lösung dieser Aufgaben setzt voraus, daß man sich von dem zu theilenden Terrein einen Plan auf dem Papier verzeichnet hat, und an diesem Plane die Theilungen vornimmt.

§. 79. Lehrsatz I. Im rechtwinkligen Dreyecke ABC (fig. 103.) ist das Quadrat der Hypotenuse AC gleich den Quadraten der Katheten zusammengenommen, d. i. DC = BF + BG, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Man ziehe AF, BE und BH ∥ CE: so ist △ AFC = △ BEC; denn AC = CE, CF = CB und n = R = m, folglich i + n = i + m. Aber △ BCE = $\frac{1}{2}$ HC (§. 70. III.) eben so △ AFC = $\frac{1}{2}$ BF; folglich HC = BF (§. 8. II.).

Da man nun auf gleiche Weise darthun kann, daß auch AH = BG ist: so ist HC + HA d. i. DC = BF + BG, oder, wie man es auch ausdrükt $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Beweis v. II. Es sey $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (fig. 104.); so wird ABC ein rechter Winkel seyn. Denn man setze DB = BC in B senkrecht auf AB, und ziehe AD: so ist nach I) $AD^2 = AB^2 + DB^2$, also AD = AC, daher beyde Dreyecke kongruent (§. 41.), folglich d. W. ABC = ABD = R.

Zusatz. Wenn in 2 rechtw. Dreyecken die Hypotenuse $AD = AC$, und ein Kathetus $AB = AB$: so ist auch der zweyte dem zweyten gleich, $BD = BC$. Denn $AD^2 = AB^2 + BD^2$, und $AC^2 = AB^2 + BC^2$; also $AB^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2$; aber $AB = AB$, folglich $BD^2 = BC^2$, also $BD = BC$.

Anmerkung.

Dieses Theorem, von seinem Erfinder Pythagoras, welcher nach den Zeugnissen des Proklus und Vitruvius den Musen wegen dieser Erfindung ein Dankopfer brachte, pythagoricum, hecatombe dignum, auch Magister matheseos genannt, und wofür man zwey Dutzend Beweise suchte, hat seinen sehr großen Nutzen in der ganzen Geometrie. Aus ihm scheint zuerst der Beweis für jenen bey den alten Philosophen, besonders Aristoteles und Plato, so berühmten Lehrsatz, daß das Verhältniß zwischen einer Seite des Quadrats und seiner Diagonale ein irrationales (§. 88. Zus. 2. B.) Verhältniß ist, hervorgegangen zu seyn. Denn das Dreyeck ACD (fig. 74. Tab. VI.) ist ein rechtwinkliggleichschenkliges, folglich $AD^2 = 2AC^2$, daher $AD^2 : AC^2 = 2 : 1$, oder $AD : AC = \sqrt{2} : 1$. Woraus erhellt, daß diese Wurzel des Quadrats der Diagonale zwar ganz genau durch eine gerade Linie (geometrisch), nicht aber in irgend einer Zahl ausgedrücket werden kann.

§. 80. Aufgabe. Ein Quadrat zu konstruiren, welches mehreren gegebenen Quadraten zusammen genommen gleich ist.

Auflösung. Man konstruire einen rechten Winkel BaC (fig. 105.) mit unendlich großen Schenkeln. Sind nun z. B. von 3 Quadraten die Wurzeln ab, ad,

ef gegeben, so mache man auf aC den Theil ab = der Wurzel ab, eben so auf aB den Theil ad = der Wurzel ad: so ist das über bd konstruirte Quadrat = den gegebenen $ab^2 + ad^2$. Bringt man nun bd aus a in c, und trägt die 3te Wurzelseite ef aus a in e: so ist $ec^2 = ab^2 + ad^2 + ef^2$.

§. 81. **Aufgabe.** **Ein Quadrat zu finden, welches der Unterschied zwischen zwey gegebenen Quadraten ist.**

Auflösung. Die Seiten der gegebenen Quadrate seyn ae, ec. Auf der kleineren ae errichte man im Endpunkte a indefinit das Perpendikel aB, ziehe aus e mit dem Halbmesser = ec einen Bogen: so ist ac die Seite des gesuchten Quadrats, wie leicht erhellt.

Anmerkung 1.

Weiß man also in Zahlen 2 Seiten eines rechtwinkligen Dreyeckes, so kann man allzeit die dritte daraus berechnen. Z. B. ist BC (fig. 104.) = 12′, AB = 25: so ist $\sqrt{(12^2 + 25^2)}$ = AC = 27′, 73 beynahe. Wäre eben so die Hypotenuse = 54′ und ein Kathetus = 42′: so wäre der andere Kathetus = $\sqrt{(54^2 - 42^2)}$ = 33′, 94.

Anmerkung 2.

Würde man auf einer geraden Linie 4 Ruthen nehmen, dann aber eine 8° lange Kette oder Schnur so fassen, daß 3° auf der Seite, wo das Loth hinfallen soll, zu liegen kommen, und nun die Kette straf anziehn: so würde auf dem Felde ein rechter Winkel abgestekt seyn (§. 79. II.).

Vierter Abschnitt.

Vom Kreise und von den um- und eingeschriebenen Polygonen.

§. 82. Erkl. Eine ebene Figur, die von einer Kreislinie ADBTA (fig. 106.) begrenzt wird, heißt eine Kreisfläche, oder schlechthin ein Kreis, Cirkel (circulus). — Vergl. §. 16. — Das Centrum der Kreislinie heißt auch der Mittelpunkt des Kreises, und die Radien und Durchmesser der Kreislinie heißen auch die Radien und Durchmesser des Kreises. Die Kreislinie ist des Kreises Peripherie (§. 15.), so wie ein Theil der Peripherie ein Kreisbogen. Die Hälfte der Peripherie ATB heißt auch Halbkreis, der vierte Theil AT Quadrant, der 6te DI Sextant, der 8te DF Oktant; — daher die Benennungen mehrerer Meßinstrumente. —

Jeder Theil der Kreisfläche DCFD, der von 2 Radien CD, CF und dem dazwischen liegenden Bogen DF begrenzt wird, heißt Kreisausschnitt (Sector circuli); jeder Theil der Kreisfläche TIAT, von einem Bogen IAT und der dazu gehörigen Sehne TI begrenzt, heißt Kreisabschnitt (segmentum circ.).

Die gerade Linie TS, welche die Peripherie in einem einzigen Punkt T berührt, heißt Tangente des Kreises für den Punkt T (§. 25.), jede Linie, welche den Kreis in 2 Theile theilt, wie TI, TD, GH, heißt die Sekante des Kreises.

Jeder

Jeder Winkel BCF, welcher den Mittelpunkt des Kreises zum Scheitel und 2 Radien zu Schenkeln hat, heißt ein Centriwinkel für den Bogen FB. Jeder Winkel ITD, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein Peripheriewinkel für den Bogen ID.

Wenn alle Seiten einer geradlinigen Figur ABDEFA (fig. 109.) Sehnen eines Kreises sind: so heißt die Figur im Kreise, und dieser um sie beschrieben. Sind aber alle Seiten der Fignr ADEBA (fig. 121.) Tangenten eines Kreises; so heißt die Figur um den Kreis, und dieser in ihr beschrieben.

§. 83. Lehrsatz. I. Gleiche Sehnen DE, AB (fig. 107.) haben gleiche Bogen und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Verbindet man die Sehnen DE, AB in ihren Endpunkten durch gerade Linien mit dem Mittelpunkte C; so sind in den wechselseitig gleichseitigen △△ DCE, ACB die Centriwinkel gleich, also auch die Bogen DFE, AGB.

Bew. v. II. Dieser erhellt leicht nach §. 35.

§. 84. Lehrsatz I. Der Halbmesser CG, welcher die Sehne AB in O, oder den Centriwinkel ACB, oder den Bogen AGB in G halbirt, ist auf die Sehne AB senkrecht, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. 1) wenn AO = OB: so sind die △△ ACO, OCB wechselseitig gleichseitig, folglich die Nebenwinkel bey O gleich. — Ist 2) m = n: so sind jene Dreyecke gleich, also wieder die Nebenwinkel bey

O

O gleich; ist 3) AG=GB: so ist m=n, daher wie vorhin (nach §. 29.) CO auf AB senkrecht.

Bew. v. II. Dieser erhellt vermöge der Voraussetzung nach §. 57. Zus. 3.

Zusatz. Also geht die in der Mitte der halbirten Sehne errichtete senkrechte Linie durch den Mittelpunkt des Kreises.

§. 85. Aufgabe. I. Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises abega (fig. 108.) zu finden.

Auflösung. Man halbire irgend eine Sehne ab in o; so ist die Mitte des in o errichteten und bis an die Peripherie verlängerten Perpendikels das gesuchte Centrum.

II. Es ist ein Bogen abe gegeben, man soll den Kreis ergänzen.

Auflösung. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt c, der, wie vorhin, auf irgend 2 Sehnen ed, ab errichteten Lothe ist des zu ergänzenden Kreises Mittelpunkt.

III. Eine Kreislinie zu ziehen, welche durch irgend 3 Punkte g, a, b, geht, die nicht in einer geraden Linie liegen.

Auflösung. Man verbinde diese Punkte durch gerade Linien ga, ab und verfahre nach II.: so wird die mit dem Halbmesser = cg oder ca, oder cb gezogene Kreislinie durch jene Punkte gehen, indem diese 3 Linien gleich sind, wie aus der Kongruenz der Dreyecke gci, aci u. s. w. (§. 35.) erhellt.

Zu-

Zusatz. Man kann also um jedes Dreyeck einen Kreis beschreiben.

IV. Eine gerade Linie MN <HB, (fig. 109.) imgleichen einen Bogen AGB, der nicht ein Halbkreis ist, ein oder mehrmals im Kreise aufzutragen.

Auflösung. Man ziehe aus A einen Bogen mit dem Halbmesser = MN: so ist die aus A zum Durchschnittspunkt B gezogene Linie = MN. Vermöge derselben Konstruktion vom Punkte B aus u. s. w. ist auch BD = DE = EF = FA = AB = MN.

Eben dadurch, daß man die Sehne AB mehrmals aufträgt, wird auch der Bogen AGB mehrmals aufgetragen (§. 83. I.). Ist nun dieser Bogen ein nter, aliquoter Theil der Peripherie; so kann er von A in der Peripherie herum bis wieder zu A nmal aufgetragen werden; ist er aber ein aliquanter Theil derselben (§. 28. Zus. 2. 3.); so kann man im Auftragen unbestimmt fortfahren.

V. Einen Kreisbogen FHE zu halbiren.

Auflösung. Man ziehe die Sehne FE, halbire sie in O durch die senkrechte Linie OH: so halbirt diese den Bogen in H (§. 84.).

§. 86. Lehrsatz. I. Der Mittelpunkt des Kreises steht von gleichen Sehnen AB, DE (fig. 107.) gleichweit ab, und II. Sehnen, von denen der Mittelpunkt gleich weit absteht, sind gleich.

Beweis v. I. Diese Abstände sind die auf den Sehnen von C aus gefällten Lothe CO, Ci (§. 65. Zusatz

satz 2.). Aber CO = Ci, denn CE = AC; AO = Ei (durch die Voraussetz.), also rc. (§. 79. Zus.).

Bew. v. II. Auf ähnliche Art beweist man, daß, wenn CO = CI, AB = DE ist.

§. 87. Lehrsatz. Jeder Peripheriewinkel BAD (fig. 110.) ist halb so groß, als der Centriwinkel BCD, welcher mit ihm auf demselben Bogen BD steht.

Beweis. Das Centrum liegt entweder in einem Schenkel des Peripheriewinkels, fig. 1te, oder zwischen den Schenkeln, fig. 2te, oder ausserhalb den Schenkeln des Peripheriewinkels, fig. 3te.

Fall I. Man ziehe CB: so ist der Winkel DCB = 2 CAB (§. 57. Zus. 2.).

Fall II. Zieht man den Durchmesser AE und BC, CD, so ist, wie vorhin, ECB = 2 BAC und ECD = 2CAD; folglich DCB = 2 (BAC + CAD) = 2 BAD.

Fall III. Zieht man wieder den Durchmesser AG, und die Radien CB, CD: so ist nach I. BCG = 2BAC, und DCG = 2DAC, also BCG — DCG = 2 (BAC — DAC) d. i. BCD = 2 BAD.

Also ist in jedem Falle BAD = $\frac{1}{2}$BCD.

Zusatz 1. Jeder Peripheriewinkel hat also nur den halben Bogen zum Maß, auf dem er steht; Peripheriewinkel sind daher einander gleich, wenn sie auf demselben oder auf gleichen Bogen ruhen (§. 8. II.), so alle diese Winkel in fig. 111.

Zusatz 2. Also ist der Peripheriewinkel ADB (fig. 112.), der auf dem Halbkreis AQB, folglich auf dem Durchmesser AB steht, = 90° = R; aber EFG > R.

Zu-

Zusatz 3. Jede zwey entgegengesetzte Winkel eines im Kreise beschriebenen Vierecks DQ sind also gleich 2R.

Zusatz 4. Also kann um ein schiefwinkliges Parallelogramm, wie Rhombus und Rhomboides, kein Kreis beschrieben werden (§. 58. I.).

Zusatz 5. Zwey parallele Sehnen AB, EF (fig. 113.) schneiden gleiche Bogen ab. Denn zieht man EB: so ist m=n, also rc. Und umgekehrt, wie leicht zu beweisen.

§. 88. Aufgabe. Im Endpunkte B einer geraden Linie AB (fig. 114.) ein Perpendikel zu errichten, wenn man AB nicht füglich, wie §§. 47. 48. verlängern kann.

Auflösung. Man nehme über AB einen solchen Punkt E an, daß man mit dem Halbmesser EB eine Kreislinie ziehen kann, welche die gegebene AB in irgend einem Punkte D schneidet: so ist die aus dem Endpunkte des Durchmessers DC gezogene CB das verlangte Perpendikel.

Geodäsie.

Um demnach auf eine andere Art, als oben (§. 47. Geod.) den Winkelhacken oder das hölzerne rechtwinklige Dreyeck zu prüfen, lege man den Scheitel des rechten Winkels an B, und den einen Schenkel genau an BA: fällt nun der andere Schenkel genau an BC hinaus; so ist das Instrument richtig.

§. 89. Lehrsatz. I. Eine gerade Linie TS (fig. 113.), senkrecht auf dem Endpunkte des Halbmessers CT, ist die Tangente des Kreises für den Punkt T. II. Der

vom

vom Mittelpunkte C zum Berührungspunkte T gezogene Halbmesser CT ist auf die Tangente senkrecht.

Beweis von I. Ausser T liegt jeder andere Punkt D der Linie TS ausserhalb der Kreislinie. Denn zieht man DC: so ist diese, als Hypotenuse, > CT.

Bew. v. II. Ausser dem Halbmesser CT (oder dem Durchmesser) kann keine andere gerade Linie CD auf TS senkrecht seyn. Denn wäre dieß: so wäre CT > CD, folglich auch Ci (= CT) > CD, was widersprechend ist.

Zusatz. Also geht die auf die Tangente TS im Berührungspunkte T senkrechte Linie durch den Mittelpunkt.

§. 90. Lehrsatz. I. Die Bogen AT, TB zwischen der Tangente TS und der mit ihr parallelen Sehne AB sind einander gleich, und II. umgekehrt.

Beweis v. I. Man ziehe AT, TB, CT: so ist △ATO ≅ △BTO, weil die Winkel bey O gleich (§. 89. I. §. 56. Zus. 2.); AO = OB (§. 84. II.); OT = OT; also der Winkel A = B, folglich $\frac{1}{2}$ AT = $\frac{1}{2}$ BT, oder AT = BT.

Bew. v. II. Ist der Bogen AT = TB: so ist auch der Winkel A = B. Zieht man nun aus dem Berührungspunkte T auf AB die senkrechte Linie TO: so sind auch, nebst TO = TO, die Winkel bey O gleich, folglich die Dreyecke kongruent, und AO = OB. Also geht TO verlängert durch den Mittelpunkt (§. 84. Zus.), folglich ist CT senkrecht auf die Tangente (§. 89. II.), also TS ‖ AB (§. 52. Zus.).

Zusatz. Also ist der halbe Bogen TB zwischen der Tangente TS und der Sehne BT das Maß des von beyden Linien gebildeten Winkels STB. Denn zieht man durch B mit TS || AB (§. 53.); so ist STB = TBA = $\frac{1}{2}$ AT = $\frac{1}{2}$ AB.

§. 91. Aufgabe. I. Eine Tangente für den gegebenen Punkt B (fig. 115.) und II. zwey Tangenten aus dem gegebenen Punkte D auf den Kreis zu ziehen.

Auflösung v. I. Man ziehe nach B den Halbmesser CB: so ist die auf diesen im Endpunkte B errichtete senkrechte Linie die Tangente DB für B (§. 89. I.).

Aufl. v. II. Man halbire die den Punkt D mit C verbindende gerade Linie DC in i; ziehe mit dem Halbmesser = Ci aus i eine Kreislinie: so hat diese mit der gegebenen die Punkte A und B gemein (§. 21.). Die nach diesen Punkten von D gezogenen geraden Linien DA, DB sind die zu ziehenden Tangenten, indem DAC und DBC rechte Winkel sind (§. 87. Zus. 2.).

§. 92. Lehrsatz. I. Schneiden sich 2 Sehnen AB, DE (fig. 116. Tab. IX.) ausserhalb dem Mittelpunkte; so hat der dadurch gebildete Winkel die halbe Summe der Bogen, die zwischen den Sehnen liegen, zum Maß, d. i. m oder n = $\frac{1}{2}$ (AE + DB). Schneiden sich II. zwey Sekanten AB, DB, oder III. eine Sekante ES und eine Tangente TS (fig. 117.) ausserhalb der Peripherie des Kreises: so hat der am gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte gebildete Winkel den halben Unterschied der zwischen diesen Linien liegenden Bogen

zum

zum Maß, d. i. ABD $= \frac{1}{2}$ (AD — GE), oder EST $= \frac{1}{2}$ (ET — DT).

Beweis v. I. Mit einer der Sehnen DE ziehe man BH parallel: so ist n = ABH (§. 56.); aber ABH $= \frac{1}{2}$ (AE + EH) (§. 87. Zus. 1.) $= \frac{1}{2}$ (AE + DB) (§. 87. Zus. 5.); folglich auch n = m $= \frac{1}{2}$ (AE + DB).

Bew. v. II. Zieht man mit einer Sekante BD parallel GH: so ist v = B, wie vorhin, folglich auch das Maß des Winkels v zugleich das für ABD, auf ähnliche Art, wie bey I.

Bew. v. III. Zieht man DF || ST: so ist der Beweis derselbe, wie bey II.

§. 93. Lehrsatz. Wenn die Kreislinie ABDEFGA (fig. 118.) in n gleiche Theile AMB, BND ... getheilt ist, und durch alle Theilungspunkte B, D, E... Sehnen AB, BD ... gezogen sind: so geben diese ein im Kreise beschriebenes reguläres n Eck.

Beweis. Alle Seiten AB, BD, DE ... sind, als zu gleichen Bogen gehörige Sehnen, aber auch alle Winkel einander gleich, GAB = ABD = BDE ... weil jeder auf n — 2 gleichen Bogen steht. Also ist die Figur ein reguläres n Eck (§. 32.).

Zusatz 1. Ist also der Bogen AMB der nte Theil der Peripherie: so ist dessen Sehne die nte Seite des im Kreise beschriebenen n Ecks, und diese Sehne n mal im Kreise aufgetragen (§. 85. IV.), giebt das reguläre n Eck.

Zusatz 2. Also ist die Kreislinie der Perimeter des regulären Unendlichecks, das man sich in ihr beschrieben vorstellt, und jeder Kreisbogen derjenige Theil die-

dieses Perimeters, der zwischen seinen Endpunkten liegt (§. 19. Zus. 2.). Die Kreisfläche ist die Fläche dieses regulären Unendlichecks, jeder Ausschnitt des Kreises der Ausschnitt des Unendlichecks, der zwischen seinen Radien liegt, und jeder Abschnitt des Kreises der Abschnitt des Unendlichecks, den die Sehne zwischen den Endpunkten des Bogens absondert.

§. 94. Lehrsatz. Wenn in einer regulären Figur ABDEF ... die geraden Linien AC, BC, DC ... die Winkel GAB, ABD, BDE ... halbiren: so stoßen diese Linien in einem Punkte C zusammen, so zwar, daß der Kreis, der CA zum Halbmesser hat, um die Figur, der mit dem Perpendikel Cm aber, als Halbmesser, beschriebene Kreis in der Figur beschrieben ist.

Beweis. Vermöge der Voraussetzung ist d. W. GAB = ABD = BDE ..., folglich auch CAB = CBA = CBD ... Aber jeder Winkel z. B. GAB < 2R (§. 58. Zus.), also auch CAB + CBA < 2R; also stoßen AC, BC im Punkte C zusammen (§. 55.), und △ CAB ist gleichschenklig, oder AC = CB.

Nun ist in den △△ CAB, CBD, AB = BD, CB gemeinschaftlich und der Winkel B halbirt, also sind die △△ kongruent (§. 35.), und AC = CB = CD. Auf gleiche Art kann man beweisen, daß alle diese geraden Linien, welche die Winkel des regulären Polygons halbiren, einander gleich sind, folglich die mit AC gezogene Kreislinie durch dessen Ecken geht. Also sind die Seiten des Polygons Sehnen des Kreises, dieser daher um es beschrieben.

Nun

Nun steht der Mittelpunkt C von allen Seiten des Polygons gleichweit ab (§. 86. I.), also sind alle Perpendikel auf diese gleich, Cm = Cn ... also geht die Kreislinie, welche Cm zum Halbmesser hat, durch alle Endpunkte m, n ..., es sind also alle Seiten der Figur Tangenten (§. 89. I.), daher der Kreis in ihr beschrieben.

Zusatz. Ist also eine reguläre Figur im Kreis beschrieben: so halbiren die aus dem Mittelpunkte nach den Ecken gezogenen Halbmesser die Winkel, und theilen das Polygon in soviel gleichschenklige kongruente Dreyecke, als Seiten der Figur sind.

Zusatz 2. Ist also die Figur, welche im Kreise beschrieben ist, ein reguläres Hexagon: so ist der Winkel CAB = CBA ... = $\frac{120}{2}$° = 60° (§. 58. Zus.), folglich jedes Dreyeck ACB, BCD ... ein gleichwinkliges (§. 57. Zus. 2.) und gleichseitiges (§. 39. Zus. 2.), also der Halbmesser CA = einer Seite des regulären Hexagons.

Anmerkung.

Die allgemeine Formel, den Winkel CAB irgend einer regulären im Kreise beschriebenen Figur zu finden, ist nach §. 57. Zus. 2. 90° — 1/n 180°. Den Centriwinkel aber ACB findet man, wenn man 360° durch die Anzahl der Seiten der Figur dividirt.

§. 95. **Aufgabe. Um ein Viereck AD (fig. 119.), in welchem die entgegengesetzten Winkel zusammen = 2R, einen Kreis zu beschreiben.**

Auflösung. Man lege durch die 3 Ecken A, B, D, eine Kreislinie (§. 85. III.), so geht diese auch durch E.

Beweis. Die Sehne, von A nach D gezogen, liegt innerhalb dem Kreise, folglich auch ein Theil der Diagonal BE. Diese schneidet also die Kreislinie noch in irgend einem zweyten Punkte entweder in i, oder irgend einem Punkte n ihrer Verlängerung, oder in E. Da aber AiD > AED, und AnD < AED (§. 63.); so ist ABD + AiD > ABD + AED, und ABD + AnD < ABD + AED, vermöge der Voraussetzung also ABD + AiD > 2 R, und ABD + AnD < 2 R. Also kann die Kreislinie weder durch i noch durch n gehen; sie geht also durch E, daher ist der Kreis um das Viereck beschrieben.

§. 96. Aufgabe I. Um jedes gegebene reguläre Polygon ABDEF... (fig. 118.) einen Kreis zu beschreiben; II. einen Kreis in ihm zu beschreiben.

Auflösung v. I. Man halbire 2 Winkel (§. 45.) A, B durch AC, BC: so stoßen diese in C zusammen, und der mit AC beschriebene Kreis ist umschrieben (§. 94).

Aufl. v. II. Man fälle von dem, auf vorige Art gefundenen, Punkte C das Loth Cm: so ist der mit diesem beschriebene Kreis in dem Polygon beschrieben (§. 94.).

§. 97. Aufgabe. In einem gegebenen Dreyecke ABE (fig. 120.) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire die Winkel A, B durch AC, BC, so ist der mit dem, aus C auf AB gefällten, Lothe CM beschriebene Kreis im Dreyecke beschrieben.

Beweis. Im △ ABC sind die W. an AB < 2 R, folglich stoßen AC, BC in C zusammen (§. 55.). 2. zieht man die Perpendikel CD, CN auf AE, BE: so sind,

wie

wie aus der Kongruenz der hiedurch gebildeten △△ leicht zu beweisen, diese Lothe gleich CM; folglich geht die Kreislinie auch durch D und N, AD, BD, AB sind Tangenten, folglich ist der Kreis eingeschrieben.

§. 98. **Aufgabe. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Hexagon und Dreyeck zu beschreiben** (fig. 118.).

Auflösung. Man trage den Halbmesser CA aus einem beliebigen Punkte A 6mal im Kreise auf (§. 85. IV.): so hat man das reguläre Sechseck (§. 94. Zus. 2.). Man trage dann die Sehne GB des doppelten Bogens GAB 3mal im Kreise auf: so hat man das reguläre Dreyeck (§. 83. II.).

§. 99. **Aufgabe. In einem gegebenen Kreise ein reguläres Viereck zu beschreiben** (fig. 121.).

Auflösung. Man errichte auf dem Durchmesser af einen andern dg senkrecht. Die geraden Linien ag, gf, fd, da, welche die Endpunkte dieser Durchmesser verbinden, sind des Kreises Sehnen, und bilden, wie leicht erhellt, die Seiten des regulären Vierecks dg.

§. 100. **Aufgabe. In einem Kreise, in welchem eine reguläre Figur dg beschrieben ist, eine andere reguläre von zweymal so viel Seiten zu beschreiben.**

Auflösung. Man halbire die Bogen über den gegebenen Seiten in b, e, N, M, und ziehe die Sehnen db, ba, rc., so hat man das verlangte Polygon (hier Oktogon) (§. 93.).

Zusatz. Also läßt sich in einem Kreise ein reguläres

res 8, 16, 32, 64 ... Eck (§. 99.) und ein reguläres 12, 24, 48, 96 ... Eck (§. 98.) beschreiben.

Anmerkung 1.

Ausser den genannten regulären Polygonen kann man auch noch geometrisch (d. i. blos mittels der geraden Linie und Kreislinie) das reguläre Fünfeck, Zehneck und Fünfzehneck (wie weiter unten §§. 128, 129. gezeigt wird), also auch ein 20, 40, 80 ... Eck, und ein 30, 60, 120 ... Eck im Kreise beschrieben. Die übrigen regulären Vielecke lassen sich mechanisch, mit Hilfe des Winkelmessers auf folgende leichte Art einschreiben: man errichtet auf dem Halbmesser z. B. Cb den Winkel bCd, welcher $1/n$ 360° enthält; der Bogen bd ist dann der n^{te} Theil der Peripherie, folglich giebt die Sehne bd n^{mal} im Kreise aufgetragen, das reguläre n Eck.

Anmerkung 2.

Die sinnreiche Methode des Renaldini (eines berühmten Ingenieurs von Ankona, 1620 gestorben, von dessen vielen Werken wir nur ein einziges „Giano Nicio Eritreo Pinacot. imag. illustr.„ besitzen) als allgemein mechanische, reguläre Polygone im Kreise zu beschreiben, ist diese. Soll z. B. ein reguläres 7 Eck VWX ... (fig. 122.) eingeschrieben werden; so ziehe man den Durchmesser V7, den man in 7 gleiche Theile theilet; aus V mit dem Halbmesser = V7 zieht man den Kreis D7C, eben so aus 7 den Kreis DVC, so, daß beyde sich in D und C schneiden. Zieht man nun durch die geraden Theilungspunkte 2, 4, 6 aus D und C die geraden Linien DB, DA, DZ, und CW, CX, CY und verbindet die Punkte V, W, X, Y, Z, A, B, V, so hat man das reguläre 7 Eck.

§. 101. Aufgabe. Um einen gegebenen Kreis, in welchem eine reguläre Figur adfg ... (fig. 121.) beschrieben ist, ein anderes von gleicher Seitenanzahl zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe nach allen Ecken die Halbmesser Ca, Cg, Cf..., fälle die Lothe Ci, Co ... auf die Seiten des gegebenen innern Polygons, verlängere dieselben bis M, N ... Zieht man dann durch M AB || ag; so schneidet diese aus den verlängerten Halbmessern Ca, Cg die Punkte A, B ab. Macht man nun CE = CB = CD ... und verbindet die Endpunkte dieser Linien: so ist ABED ... das um den Kreis beschriebene reguläre Polygon von gleicher Seitenanzahl.

Beweis. Da in den △△ ACM, MCB die Winkel um M gleich sind (§. 56. Zus. 2.), eben so die Winkel um C (§. 84. II.), und CM gemeinschaftlich: so sind jene Dreyecke kongruent (§. 37.), und AC = BC, daher auch CE = CD = CA ... Aber auch die Winkel ACB, BCE u. s. w. gleich, indem sie gleiche Bogen zum Maß haben, also auch die Dreyecke ABC, BEC... kongruent, und AB = BE = ED ... und die Winkel dieser △△ wechselseitig gleich, also auch die ganzen Polygonwinkel. Das Polygon ABED ... ist demnach 1) regulär; 2) aber auch um den Kreis beschrieben. Denn die Perpendikel CM, CN ... sind gleich (§. 65. Zus. 4.). Die Punkte M, N ... liegen also in der Kreislinie, oder jene Linien sind Halbmesser, folglich die Seiten des Polygons Tangenten.

Zusatz. Es können also soviel reguläre Figuren geometrisch umschrieben werden, als man einschreiben kann.

§. 102. Aufgabe. Auf einer gegebenen Seite AB (fig. 123.) ein reguläres Sechseck zu errichten.

Auflösung. Ueber AB errichte man das gleichseitige △ ABC (§. 34.), und beschreibe mit CA eine Kreislinie; so ist der Bogen AB ein Sextant; folglich giebt die Sehne AB 6mal im Kreise aufgetragen, das verlangte reguläre Hexagon (§. 93.).

Anmerkung.

Mechanisch konstruirt man über AB irgend eine reguläre Figur, wenn man den Winkel CAB = CBA, nach §. 94. Anm. berechnet, an A und B errichtet, und aus dem Durchschnittspunkte C mit dem Halbmesser CA einen Kreis beschreibt, auf welchem man die Sehne AB nmal aufträgt.

§. 103. Lehrsatz. Ein im Kreis beschriebenes reguläres Polygon ABDEF ... ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem Perimeter und dessen Höhe dem Abstande des Mittelpunktes von einer der Seiten des Polygons gleich ist, und jeder Ausschnitt ABDCA des Polygons ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie der gebrochenen Linie ABD, und dessen Höhe dem Abstande des Mittelpunktes von einer der Seiten des Polygons gleich ist.

Beweis. Ein reguläres Polygon von n Seiten wird, wenn man aus dem Mittelpunkte des Kreises, in welchem es beschrieben ist, Halbmesser nach jeder Ecke

gezogen denkt, in n kongruente Dreyecke getheilt (§. 94. Zus. 1.); da nun auch alle diese Dreyecke gleiche Höhen haben (§. 65. Zus. 4.): so sind sie zusammen dem im Lehrsatze angegebenen Dreyecke gleich (§. 70. Zus. 2.). Eben so sind die Dreyecke, welche den Abschnitt des Polygons ausmachen, zusammen so groß, als das im Satze genannte Dreyeck.

Zusatz 1. Also ist die Kreisfläche so groß, als ein Dreyeck, in welchem die Grundlinie der Peripherie und die Höhe dem Halbmesser gleich ist, und jeder Ausschnitt des Kreises ist so groß, als ein Dreyeck, dessen Grundlinie dem zugehörigen Kreisbogen und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist (§. 93. Zus. 2.).

Zusatz 2. Man kann daher auch umgekehrt sagen, daß jedes Dreyeck irgend einem Kreise gleich, und jedes Rechteck nochmal so groß ist, als ein Kreis, dessen Peripherie der Grundlinie des Dreyecks, oder der Grundseite des Rechteckes, und dessen Halbmesser ρ der Höhe des Dreyeckes, oder einer der Seiten des Rechteckes gleich ist, welche der Grundseite nicht entgegengesetzt ist.

§. 104. Aufgabe. Ein gegebenes reguläres Polygon ABDEFGA (fig. 125.) in ein Dreyeck ahC von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.

Auflösung. Man trage auf einer geraden Linie ah die Seite AB 6mal auf (§. 24.), mache aC = Co, so ist △ aCh = dem gegebenen Hexagon, wie deutlich erhellt.

Zusatz. Ist also der Halbmesser und die Peripherie oder der Bogen eines Kreises gegeben; so kann man auch

den

den Kreis oder den Kreisausschnitt in ein gleiches Dreyeck verwandeln.

Anmerkung.

Man kann den Quadranten AF (fig. 183.) auf folgende leichte Weise in seine 90 Grade theilen: Man trage den Halbmesser von A nach E (§. 94. Zus. 2.) halbire den Bogen AE in D; so ist dann auch EC der 4te Theil des Quadranten; man verfahre dann weiter nach dem Verse: „in tres, in binas, in tres, in quinque secato„ — nämlich in den Punkten D und E ist AF schon in 3 gleiche Theile getheilt. Jeden dieser Theile halbire man, jeden dieser zwey gleichen Theile theile man weiter in 3 gleiche, und endlich jeden von diesen in 5 gleiche Theile.

Man sieht, daß man so den ganzen Halbkreis AFB in seine 180 Grade theilen könne.

Fünfter Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren und den Verhältnissen ihrer Linien.

§. 105. Erklärung 1. Größen sind im Verhältniße, wenn sie vervielfältigt, einander übertreffen können.

2. Größen sind im einerley Verhältnisse, oder proportionirt, die erste nämlich verhält sich zur zweyten, wie die dritte zur vierten, wenn man bey Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen der ersten und dritten Größe mit einem jeden Gleichvielfachen der zweyten und vierten Größe findet, daß, wenn das Vielfache der ersten

sten Größe < oder = oder > (d. i. $\lesseqgtr$), als das Vielfache der zweyten ist, auch das Vielfache der dritten $\lesseqgtr$, als das Vielfache der vierten ist, und umgekehrt.

3. Ist aber unter solchen Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe >, als das Vielfache der zweyten, hingegen das Vielfache der dritten nicht größer, als das Vielfache der vierten: so hat dann die erste Größe zur zweyten ein größeres Verhältniß, als die dritte zur vierten.

§. 106. Lehrsatz I. Gleiche Größen A, B (fig. 124.) haben zu einer Größe C, II. eine Größe C hat zu gleichen Größen A, B einerley Verhältniß.

Beweis v. I. Man mache von A, B ein Gleichvielfaches D, E; so ist, weil $A = B$, auch $D = E$. Macht man nun von C ein Vielfaches F; so ist wie $D \lesseqgtr F$, eben so auch $E \lesseqgtr F$, folglich $A : C = B : C$ (§. 104. 2.).

Bew. v. II. Da $D = E$; so ist wie $F \lesseqgtr D$, eben so auch $F \lesseqgtr E$, folglich wieder $C : A = C : B$.

§ 107 Lehrsatz. Von zwey ungleichen Größen AB, C (fig. 125.) hat die größere AB zu einer dritten D ein größeres Verhältniß, als die kleinere C, und eine dritte Größe D hat zur kleinern C ein grösseres Verhältniß, als zur größeren AB.

Beweis. Man mache in AB einen Theil $BE = C$; so wird der kleinere Theil AE oder BE vervielfältigt die Größe D übertreffen (§. 105. 1.). Es sey nun I. $AE < EB$. Man mache von AE das Vielfache $FG > D$,

und

und von EB das Gleichvielfache GH: so ist GH = K dem Gleichvielfachen von C.

Nun sind nach der Konstruktion die Verhältniße FG : AE und GH : C gleich, also FG + GH : AE + C = GH : C (§. 38. B.), d. i. FH : AB = K : C d. i. FH, K sind das eben so vielfache von AB, C.

Macht man nun von D das zweyfache L, das dreyfache M, das vierfache N, welches zunächst größer als K sey: so ist K, folglich auch GH, nicht < M. Aber FG > D, folglich FH > M + D, d. i. FH > N, wie K < N. Da nun FH, K ein Gleichvielfaches von AB, C und N ein Vielfaches von D; also AB : D > C : D (§. 105. 3.).

Aus eben den Gründen, weil N > K, aber nicht N > FH, ist D : C > D : AB.

II. Es sey BE < EA (fig. 126.). Man mache von BE das Vielfache GH und von AE das Gleichvielfache FG, eben so von C das Gleichvielfache K = GH. Es sind folglich gerade so wie vorhin, FH und K die Gleichvielfachen von AB und C. Ist nun wieder, durch dieselbe Konstruktion, wie vorhin, N zunächst > FG, folglich FG nicht < M: so ist, weil GH > D, FH > M + D d. i. FH > N. Aber K nicht > N, folglich, wie vorhin, AB : D > C : D und D : C > D : AB.

Zusatz. Also sind Größen A, B (fig. 127.) welche zur dritten C, (oder zu gleichen Größen) einerley Verhältniß haben, oder zu denen eine dritte Größe (oder gleiche Größen) einerley Verhältniß hat (haben), gleich.

§. 108.

§. 108. Lehrsatz. Verhältniße A : B, E : F (fig. 128.), welche einer dritten C : D (oder mehreren gleichen Verhältnißen) gleich sind, sind einander selbst gleich.

Beweis. Man mache von A, C, E willkührlich das Gleichvielfache G, H, K, und von B, D, F das Gleichvielfache L, M, N; so ist, weil A : B = C : D, eben so, wie G $\gtreqless$ L, auch H $\gtreqless$ M, (§. 105. 2.), und, weil C : D = E : F, ist eben so, wie H $\gtreqless$ M auch K $\gtreqless$ N. Daher ist wie G $\gtreqless$ L, so auch K $\gtreqless$ N. Nun sind G, K von A, E und L, N von B, F gleichvielfach; also A : B = E : F (§. 105. 2.).

Zusatz. Ist also das eine Verhältniß A von zwey gleichen Verhältnissen A, B ein Verhältniß der Gleichheit (§. 87.), so ist auch B ein solches. Denn wenn a : a = b : c, so ist auch a : a = 1 : 1 (§. 94. B.) folglich auch (vermöge des Lehrsatzes) b : c = 1 : 1, oder b = c (§. 93. B.).

§. 109. Erkl. Figuren heißen ähnlich, deren Winkel nach der Ordnung wechselseitig gleich, und deren Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen, (geometrisch-) proportional sind. So sind 2 Polygone fig. 129. ähnlich, wenn A = a, B = b, C = c ... und AB : ab = BC : bc = CD : cd ... ist; Seiten wie AB, ab; BC, bc, welche sich in der Proportion entsprechen, nennen wir homologe Seiten.

Zusatz 1. Also sind alle reguläre Figuren von gleich viel Seiten ähnlich. Denn ja jeder Winkel in allen von einerley Größe ist: so sind alle Winkel des einen Polygons

gons

gons gleich den Winkeln des andern. In jeder einzelnen Figur sind auch alle Seiten gleich, folglich ist das Verhältniß jeder 2 Seiten in der einen, wie in der andern Figur ein Verhältniß der Gleichheit (§. 87. B.), folglich in beyden gleich (§. 89. vergl. mit §. 88. B.); mithin sind jede 2 Seiten der einen jeden 2 Seiten der andern proportional. Also sind die Figuren ähnlich.

Zusatz 2. Also sind alle Kreise ähnlich (§. 93. Zus. 2.).

§. 110. Lehrsatz. Wenn zwey Dreyecke ABC, AFC (fig. 130.) eine gemeinschaftliche Spitze C haben, und ihre Grundlinien AB, AF in einer geraden Linie liegen: so verhalten sie sich, wie ihre Grundlinien, d. i. △ ABC : △ AFC = AB : AF.

Beweis. Ist AD = 2AB: so ist AB = BD und △ ABC = △ BDC (§. 70. Zus. 1.), also △ ADC = 2 △ ABC. Ist AE = 3 AB, so ist BE = 2 AB, folglich △ BEC = 2 △ ABC (wie vorhin), also △ AEC = 3 △ ABC. Eben so erhellt, daß wenn AF = 4 AB, auch △ AFC = 4 △ ABC u. s. w., d. i., daß eine n^{mal} größere Grundlinie ein n^{mal} größeres Dreyeck giebt; also sind die genannten Dreyecke ihren Grundlinien proportional (§. 105. 2.).

§. 111. Lehrsatz I. Zwey Dreyecke ABC, abc (fig. 131.), von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien AB, ab; II. von gleichen Grundlinien AB, DF (fig. 132.), wie ihre Höhen EI, Ci.

Beweis v. I. Man mache AI = ab und ziehe CI, so ist △ AIC = △ abc (§. 70. Zus. 1.); aber △

AIC:

AIC : △ ABC = AI : AB (§. 110.), also auch △ abc : △ ABC = ab : AB.

Bew. v. II. Man errichte auf AB und DF die Perpendikel BH, FK, welche man den Höhen Ci, EI gleich macht. Zieht man noch AH, DK, und nimmt in den △△ AHB, DKF BH, FK zu Grundlinien an: so ist △ AHB : △ DKF = BH : FK (aus I.). Aber diese Dreyecke sind den gegebenen △△ gleich (§. 70. Zus. 1.); also auch △ ACB : △ DEF = Ci : EI.

Zusatz. Also ist auch das Parallelogramm ad : AD = ab : AB und AG : DH = Ci : EI (§. 94. Zus. 2. B.).

§. 112. Lehrsatz. I. Wenn im Dreyecke ABC (fig. 133. 1te) eine gerade Linie (DE) mit einer Seite des Dreyecks (AB) parallel ist: so schneidet sie die übrigen Seiten proportional, d. i. wenn DE || AB ist; so ist AD : DC = BE : EC, oder AC : DC = BC : EC. Und II umgekehrt.

Beweis von I. Man ziehe AE, BD: so ist △ ADE = △ BDE (§. 70. II.); also △ ADE : △ DCE = △ BDE : △ DCE (§. 106.). Aber △ ADE : △ DCE = AD : DC (wegen derselben Höhe Ei), und eben so △ BDE : △ DCE = BE : EC; folglich AD : DC = BE : EC (§. 108.).

Da derselbe Beweis gültig ist, mit welcher Seite man eine Parallele ziehen mag: so ist er allgemein gültig. Es ist also auch AC : DC = BC : EC (§. 97.) und AC : BC = DC : EC.

Bew. von II. Es sey AD : DC = BE : EC; so ist DE ∧ AB. Denn ist DE = AB; so sey irgend eine

andere

andere gerade Linie Dg || AB. Also ist AC : DC = BC : gC (nach I.); folglich nach der Voraussetzung und §. 108. auch BC : gC = BC : EC oder BC : BC = gC : EC, d. i. gC = EC (§. 108. Zus.), was widersprechend ist.

Derselbe Beweis kehrt wieder, wenn irgend eine andere gerade Linie, welche man durch D ziehen kann, und unter DE fällt, parallel mit AB seyn soll.

Zusatz 1. Wird daher AC von DE so geschnitten, daß AD = DC; so ist auch BE = EC (§. 108. Zus.), und wenn AE das nfache von DC: so ist auch BE das nfache von EC (§. 105. 2.). Und eben so, wenn der Schnitt der Parallele DE mit AB ein nfaches AC von DC giebt: so giebt derselbe auch ein nfaches BC von EC.

Zusatz 2. Aber auch AB ist dann das nfache der kleineren Parallellinie DE (fig. 134.). Denn es sey DG = DC oder CG = 2DC: so ist auch HE, indem GH, durch G parallel mit DE gezogen ist, gleich EC, und HC = 2EC. Zieht man nun durch E mit AC || EF, so ist eben darum GF || FH; aber auch GF = DE, folglich GH = 2GF = 2DE.

Ist 2) CD = DG = GA oder AC = 3DC: so ist auch BC = 3EC. Zieht man nun wieder HI || AC: so ist BI = HF = DE und AI = GH, also AI + IB = 2DE + DE d. i. AB = 3DE u. s. w. d. i. AC : CD = 3 : 1, so ist auch AB : DE = 3 : 1, oder AC : DC = AB : DE.

Zusatz 3. Das kleine Dreyeck CDE, welches

durch

durch jenen parallelen Schnitt entsteht, ist also ähnlich mit dem ganzen ABC (vergl. §. 109.).

Zusatz 4. Wenn daher fig. 133. 2te CE den Winkel ACB halbirt: so sind die Segmente AE, EB den Seiten AC, BC proportional und umgekehrt; denn zieht man von A aus AD || CE, begrenzt von der fortgezogenen BC; so ist nach dem Satze BC : CD = BE : EA; aber D = i, m = o, also D = m; daher statt CD substituirt werden kann CA. — 2) Ist BC : CA = BE : EA : so ist, da auch BC : CD = BE : EA, auch BC : CA = BC : CD d. i. CA = CD, daher m = D, und o = i.

§. 113. Aufgabe. I. Zu drey, oder II. zu zwey gegebenen geraden Linien die vierte, oder die dritte Proportionallinie zu finden.

Auflösung v. I. Es seyn die 3 gegebenen Linien A, B, C (fig. 135.); man vereinige A, B zu einer geraden Linie Xs, ziehe durch X unter einem beliebigen Winkel AZ unbestimmt lang; macht man nun Xm = C: so ist, wenn man mn und mit dieser parallel sr zieht, mr oder D die gesuchte Proportionallinie (§. 112.).

Auflös. von II. Es seyn A, B gegeben. Man ziehe Vm = B, und mache auf der unter einem willkührlichen Winkel durch V gelegten Linie VL den Theil Vn = A; ziehe Vm bis r fort, so, daß Vr = A; zieht man nun mn und dieser parallel rs: so ist Vs die dritte größere Proportionallinie, indem Vm : Vn = Vr : Vs d. i. B : A : Vs.

Wäre

Wäre aber Vr, Vs gegeben, und man machte Vn = Vr, und zöge die Parallellinien sr, nm; so wäre dann Vm die dritte kleinere Proportionallinie.

§. 114. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie AE (fig. 136.) in so viel gleiche Theile zu theilen, als man will, z. B. in 4.

Auflösung 1. Unter irgend einem spitzen Winkel ziehe man AI indefinit; theile diese schicklich in die verlangten 4 Theile AF = FG etc. und ziehe IE, dieser parallel durch die Theilungspunkte H, G, F die Linien HD, GC, FB: so ist auch AE in 4 gleiche Theile AB = BC = CD = DE getheilt (§. 112. Zus. 1.).

Aufl. 2. Soll z. B. AB (fig. 137.) in 3 gleiche Theile getheilt werden: so ziehe man entweder über oder unter AB eine Parallellinie HL, die man schicklich in 3 gleiche Theile theilt; dann ziehe man HC, KC und von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte C auf die Theilpunkte gerade Linien: so wird durch diese AB ebenfalls in 3 gleiche Theile getheilt.

Beweis. CH : CA = HG : Ag = CG : Cg = GI : gi (§. 112. Zus. 3.); also HG : Ag = GI : gi (§. 108.); aber HG = GI folglich auch Ag = gi (§. 108. Zus.). U. s. w. auf gleiche Art.

§. 115. Aufgabe. Eine gegebene Linie Xr (fig. 135.) in eben dem Verhältniße Xn : ns zu theilen, in welchem eine andere Xs getheilt ist.

Auflösung. Man verbinde beyde Linien z. B. unter dem Winkel X, ziehe sr und dieser parallel nm. (§. 112).

An-

Anmerkung.

Es bleibt eine ähnliche Konstruktion, wenn AE (fig. 136.) z. B. in 4 Theile, welche 4 gegebenen Linien proportionell sind, getheilt werden sollte. Man vereinigte die gegebenen 4 Linien in eine gerade Linie AI, und verbände diese unter einem beliebigen Winkel mit AE u. s. w.

Dasselbe ist klar, wenn die Verhältnisse in Zahlen ausgedrückt sind, z. B. AE in 4 Theile zu theilen, welche sich unter einander wie 2, 3, 5, 7 verhalten. Man würde auf AI irgend einen schicklichen Theil 17mal auftragen, und durch die Theilpunkte 2, 3, 5 Parallellinien mit IE ziehen.

Man kürzt dieses Verfahren, eine grade Linie AE in gleiche oder proportionelle Theile zu theilen, ein wenig ab, wenn man durch E noch eine Parallellinie mit IA zieht, und jene von E aus eben so theilt, wie AI. Die geraden Linien NH, MG .... von einem Theilpunkte zum entsprechenden gezogen, theilen AE in die verlangten Theile. Denn diese Linien z. B. FL, GM sind parallel, wie aus der Kongruenz der Dreyecke LMF, FGM (nach §. 35.) leicht erweislich.

Geodäsie.

I. Einen verjüngten Maßstab (scalam geometricam) zu verfertigen. Nro. I. (fig. 138.) stellt einen einfachen verjüngten Maßstab vor, den man erhält, wenn man eine gerade Linie CG oder DH auf dem Papiere in gleiche Theile, wie CA=AE=EF ... theilt; dann im äußersten Punkte C auf CG eine gerade Linie so errichtet, daß das gebildete Parallellogramm BC entweder vollkommen oder doch beynahe ein Quadrat wird. Theilt man nun CD in 10 gleiche Theile, zieht durch die Theilungspunkte die Parallellinien, wie die Figur zeigt (alles dieß geschieht auch bey Nr. III.), und dann die Dia-

Diagonale AD: so ist mn der 10te, rs der 5te Theil u. s. w. von AC oder BD (§. 112. Zus. 2.), d. i. wenn man einen Theil, wie AC, eine Ruthe auf dem Papiere bedeuten läßt: so ist mn $= \frac{1}{10}^{\circ} = 1'$ und rs $= \frac{5}{10}^{\circ}$ $= 5'$ u. s. w.

Bey Nro. II. ist C5 $= \frac{1}{2}^{\circ} = 5'$, und weil CD in 5 gleiche Theile getheilt ist; so ist h1 $= \frac{1}{5}$ C5 $= 1'$; so g2 $= \frac{2}{5}$ C5 $= 2$, u. s. w. Auch ist d6 $=$ 4e $= 4'$, folglich auch e6 $=$ ed $-$ d6 $= 10' - 4' = 6'$; eben so f7 $= 7'$, g8 $= 8'$ u. s. w.

Um nun noch kleinere Theile des Längenmaßes, als Ruthen und Schuhe, mittels eines solchen verjüngten Maßstabes nehmen zu können, werden auch AC und BD, wie in Nro. III. in 10 gleiche Theile getheilt, und von A zu a u. s. f. von jedem Theilungspunkte in AC zu jedem entsprechenden in BD gerade Linien (Transversallinien) gezogen, wodurch man rs $= \frac{1}{10}$ Ba, und io $= \frac{5}{10}$ Ba u. s. w. erhält, d. i. wenn BD $= 1^{\circ}$, folglich Ba $= 1'$: so bedeutet rs einen und io fünf Zolle.

Ferner erhellt, daß, wenn man 10 solcher Theile, wie AC, d. i. nach 40 noch 7 solcher Theile absetzt, man einen tausendtheilchen Maßstab habe; indem nämlich Theile wie AE 10theilchen, Theile wie Ai 100theilchen, und Theile wie rs 1000theilchen der ganzen Länge sind. Würde man endlich die Theile der Linien CD, 40R . . . etwas größer machen, so, daß man sie füglich in 10 andere gleiche Theile theilen könnte, und dann aus jedem Theilungspunkte Parallellinien mit C40 ziehen; so hätte man einen 10000theilchen Maßstab.

Hiebey ist noch zu bemerken, daß man jedes Theilchen, wie A1 oder Ba, wenn jedes eine Ruthe bedeutet, 5 Linien lang zu machen pflegt; wenigstens dürfen sie nicht unter 3''' groß seyn, wenn sie Ruthen bedeuten sollen, weil sonst nach einem solchen Maßstabe unmöglich genaue Pläne könnten entworfen werden. — Wollte man

einen Maßstab für die 12theilige Eintheilung haben; so setzte man überall 12 statt 10 Theile.

Gebrauch.

1.) Soll man z. B. eine Länge von 3° 7′ 5″ mit dem Zirkel fassen und auf das Papier tragen: so faßt man die Linie zx mit dem Zirkel. Denn zx = zi + io + ox = 40 A + io + A 7 = 3° + 5″ + 7′. — Sollte man umgekehrt die Länge einer auf dem Papier gegebenen Linie bestimmen; so faßte man mit dem Zirkel diese Linie, und setzte dessen eine Spitze so z. B. in z, oder y u. s. w., daß die andere Spitze in das getheilte Viereck BC z. B. in o oder x fällt, wo denn der Maßstab die Länge der Linie angiebt.

Um 2.) gerade Linien von gegebenem Verhältniße auf das Papier abzutragen, z. B. 2 Linien im Verhältnisse 320 : 460, drückt man vorher entweder dieses Verhältniß (nach §. 94. B.) kürzer aus, indem man setzt 16 : 23, oder man läßt es, wie hier, wo die Zahlen nicht zu groß sind, unverändert, nimmt von dem tausendtheilchen Maßstabe 320 Theile, oder 3° 2′ 0″ und trägt sie auf das Papier; eben so faßt man die Weite 4° 6′ 0″ und setzt sie ab. — Wäre das Verhältniß irrational z. B. 1 : $\sqrt{20}$; so verfährt man z. B. nach §. 55. B. und nimmt das Verhältniß z. B. 1000 : 4473, oder findet, wie in der Ziffernr. gelehrt worden, die Wurzel durch Näherungen.

Um 3.) eine gegebene gerade Linie AE (fig. 136.) z. B. in 3 Theile zu theilen, welche sich z. B. zu einander verhalten, wie 12 : 17 : 2r, trägt man auf AI zuerst 12, dann 12 + 17 = 29, dann 50 Theile immer von A aus von dem Maßstabe ab; das Uebrige wie §. 115. Geben diese Zahlen zu kleine Theile vom Maßstabe; so drückt man nach §. 94. B. diese Verhältnißzahlen in größeren aus.

Um

Um 4) eine gegebene Linie AE z. B. in 4 gleiche Theile zu theilen; findet man nach 1) die Länge derselben z. B. = 648 Theilen; trägt dann 162 Theile ($=\frac{1}{4}648$.) von A nach B, dann 2. 162. von A nach C; 3. 162 von A nach D, 4. 162 Theile des Maßstabes von A nach E. Dadurch vermeidet man hier, wie bey 3), die Zirkelwendungen bey B, C, D, die man machen müßte, wenn man jedesmal nur 162 Theile abtragen wollte, wie auch des Ziehens der Parallellinien (§. 114.), was ohne verjüngten Maßstab nicht kann vermieden werden.

II. Der Proportionalzirkel (circinus proportionum). — Die allereinfachste von Galiläi (dem Erfinder *) beschriebene Einrichtung dieses Instrumentes ist folgende: ABCD, EFGC sind 2 gleich lange messingene Liniale, welche sich bey C dem Mittelpunkte einer runden Platte um ein Gewinde bewegen. Die Diagonallinien CA, CF, oder auch ein Paar andere von C ausgehende Linien, werden in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, z. B. in 100, auch wohl in 200 u. s. w. oder mit Hülfe der geometrischen Skala in 1000 Theile getheilt, so, daß die Theilpunkte, bey denen auf den Schenkeln gleiche Zahlen z. B. 20, 20 stehen, vom Punkte C gleiche Entfernungen haben. Diese eingetheilten Diagonallinien nennt man die arithmetischen (lineas partium aequalium).

Gebrauch.

1. Eine gegebene Linie z. B. in 7 gleiche Theile theilen. Man fasse mit einem Handzirkel die Linie, setze die eine Spitze z. B. auf 70, d. i. auf einen solchen Theilpunkt des einen Linials, dessen beigeschriebene Zahl sich durch 7 messen läßt, und öfne den Proportionalzirkel so lange, bis die andere Spitze des Handzirkels

*) S. Kästners Gesch. der Mathem. 3ter Th. S. 336—352.

kels auf den entsprechenden Theilpunkt 70 fällt. Die mit dem Handzirkel gefaßte Weite 10, 10 ist nun der 7te Theil der gegebenen Linie (§. 112. Zus. 2.). — Sollte die Linie z. B. in 5 gleiche Theile getheilt werden und die Spitzen des Zirkels, mit dem man die gegebene Linie faßte, fielen auf die Theilpunkte 100: so wäre die Weite zwischen 20, 20 der gefoderte 5te Theil; eben so die Weite 10, 10, wenn die Spitzen auf 50, 50 gefallen wären. Denn 10 : 50 = 1 : 5, und eben so 20 : 100 = 1 : 5.

2. Eine gegebene Linie in gegebenem Verhältnisse z. B. 20 : 50 zutheilen. Man addire diese Zahlen, und setze den Handzirkel, mit dem man die gegebene Linie faßt, auf die Theilpunkte 70, 70; bey unverrükter Oefnung nehme man die Weite zwischen 20, 20 und 50, 50: so geben diese das Verlangte. Denn denkt man sich die Parallellinie 20 a gezogen: so verhält sich n20 : 20C = na : a70 = 50 : 20.

3. Zu 3 gegebenen Linien a, b, c die 4te Proportionallinie d zu finden. Man trage die Weite a auf den Schenkel CA des Proportionalzirkels, z. B. von C nach 20; ferner b von C nach 50 auf demselben Schenkel. Fasse dann die Weite c, setze die eine Zirkelspitze in den Theilpunkt 20, wo sich die erste Weite endigte, und öfne die Liniale bis der Abstand der Punkte 20, 20 genau c gleich wird, dann wird die Weite zwischen den Theilpunkten 50, 50 die gesuchte 4te Proportionallinie seyn. Denn C20 : C50 = 20, 20 : 50, 50.

4. Man kann sich dieses Instruments auch als eines verjüngten Maßstabes bedienen. Denn soll irgend eine gerade Linie z. B. die Länge von 100 Ruthen vorstellen: so darf man nur die Spitzen des Handzirkels, mit dem man die gegebene Linie faßte, auf die Theilpunkte 100, 100 setzen; so stellt die Weite von 10 zu 10 10°, die von 11 zu 11 11° vor. Sollte dieselbe Linie nur 5° vorstellen; so setzte man die Spitze des

Zir-

Zirkels, mit dem man diese Linie faßte auf 50, 50 der beyden Schenkel, dann giebt der Abstand des Punktes 10 von 10 1°, und der von 3 zu $3\frac{1}{3}$° rc.

III. Methode kleine Theile von Linien oder Winkeln anzugeben. Eine sehr bequeme und gebräuchliche Methode ist diese: Man hat eine gerade Linie oder einen Bogen A in gleiche Theile getheilt, jeder $= b$. Man nimmt m solcher Theile, und theilt soviel als sie betragen, in $m + 1$ oder in $m - 1$ Theile. Diese Theilung trägt man auf eine Platte, welche sich an A verschieben läßt, wo sich nun vermittels der Theilungsstriche, welche aneinander zu liegen kommen, Theile angeben lassen, deren jeder $= \frac{b}{m+1}$ oder $= \frac{b}{m-1}$ ist.

Die Erfindung dieser Methode wird gewöhnlich dem Peter Nunez oder Nonius (einem Portugiesen, Prof. der Mathem. zu Coimbra, geb. 1492. zu Alcazar del Sal) zugeschrieben; aber Kästner *) eignet sie einem Teutschen, Peter Vernier oder Werner zu. Dieser giebt sich auf dem Titel seines Buches selbst an: composé par Pierre Vernier Capitaine et Chastellain pour Sa Majeste au chasteau Dornans conseiller et général de ses monnoyes au Comté de Bourgogne. (Vernier lebte nämlich in den Niederlanden, als Unterthan eines Königs von Spanien aus dem österreichischen Hause. Die französische Sprache war in den dortigen Gegenden gewöhnlich, ob sich gleich die Einwohner nicht zu den Franzosen rechneten). Daher nennt man nun jene an der Größe A, dem eingetheilten Rande, verschiebbare Platte selbst den Vernier oder Nonius.

Erklärung 1. AB sey eine in gleiche Theile getheilte Linie (fig. 140.). Man trage nun z. B. die Weite

G 2 mc

*) S. dessen zweyte Samml. astron. Abh. 5te Abh. S. 180., und 38te Abh. der geometr. Abh. II. Samml., vergl. mit dessen Gesch. d. Math. 3te B. S. 353.

Staatliche Bibliothek Bamberg

mc von 9 dieser Theile auf MC und theile diese in 9—1 gleiche Theile: so ist ML = a = $\frac{1}{8}$ MC; und ml = b = $\frac{1}{9}$ MC, folglich der Unterschied a — b = $\frac{1}{72}$ MC, oder auch, weil auch, 8a = 9b, folglich a = $\frac{9}{8}$ b, a — b = $\frac{1}{8}$ b; d. i. ein Theil ML auf MC ist um den 72ten Theil der ganzen Länge MC größer, als ein Theil ml von mc, oder ML ist um den 8ten Theil von ml grösser als dieser, folglich, jenen von m nach r getragen, ist das Stückchen lr der 8te Theil von ml oder kl, oder der 72te der ganzen Länge mc (=MC).

Es ist ferner MK — mk = 2 (a — b) = $\frac{2}{8}$ b
— — MI — mi = 3 (a — b) = $\frac{3}{8}$ b
u. s. w.

Denkt man sich also den Nonius MC, dessen Index oder Anfangsstrich M seyn solle, so an den eingetheilten Rand AB gelegt, daß die Theilstriche bey M, m und C, c eine gerade Linie bilden, so steht der Theilstrich L von l um $\frac{1}{8}$ b, K von k um $\frac{2}{8}$ b, I von i um $\frac{3}{8}$ b u. s. w. ab, d. i. alle Theilstriche des Vernier L, K, I fallen alle linker Hand derjenigen Theilstriche des eingetheilten Randes mc, die mit denen des Vernier einerley Zahl haben. Schiebt man den Vernier gegen die Rechte an mc fort: so entfernt sich der Index M, sobald L auf l trift, von m um $\frac{1}{8}$ b, und, so wie die Theilstriche K, I.. an die ähnlichen k, i.. zu liegen kommen, um $\frac{2}{8}$ b, $\frac{3}{8}$ b.. Will man daher wissen, um wie viel ein gewisser Punkt μ zwischen m und n von erstem Theilstriche m linker Hand abstehe; so bringt man den Index M genau an μ, und untersucht, welcher Theilstrich des Vernier genau mit dem eben so vielsten des eingetheilten Randes AB zusammentrift. Gesetzt es sey dieß G oder der 5te Theilstrich; so steht μ von m um $\frac{5}{8}$ b ab, oder μm = $\frac{5}{8}$ b, und die Weite Aμ würde dann = 12 b + $\frac{5}{8}$ b seyn. — Gesetzt aber es fiele, den Index M an den Punkt v (fig. 141.) gebracht, kein Theilstrich des Nonius an einen ähnlichen

des

des eingetheilten Randes: so bemerkt man den Theilstrich des N. welcher am wenigsten Abstand rechter Hand von einem ähnlichen des eingetheilten Randes hat; ist dieß z. B. der 3te l: so ist zwar $mv > \frac{3}{8}b$, aber doch $< \frac{4}{8}b$, also doch mv zwischen Gränzen; aber Ii ist genau gleich dem Werthe, um wieviel $mv > \frac{3}{8}b$. Um nun Ii zu finden, schätze man nach dem Augenmaße, welches Verhältniß Ii, Hh gegeneinander haben; es sey dieß $Ii : Hh = s : p$; so ist $Hh = \frac{p}{s} Ii$. Nun ist $HI - hi = \frac{1}{8}b = Ii + Hh$; also $Ii = \frac{s}{p+s} \cdot \frac{1}{8}b$ (durch Subst.). Wäre z. B. $s = 3$ und $p = 1$; so wäre $mv = \frac{3}{8}b + \frac{3}{32}b$, folglich $Av = 12\,b + \frac{3}{8}b + \frac{3}{32}b$. Setzt man nun statt 9 allgemein m: so ist ein Theil des Nonius um $\frac{b}{m-1}$ grösser, als ein Theil des Randes.

Sind ferner auf dem eingetheilten Rande von A bis m x Theile, und für das Stückchen $m\mu$ treffe der yte Theilstrich des Nonius CM genau an einen Theilstrich des Randes: so ist allgemein

$$A\mu = xb + \frac{y}{m-1}\, b.$$

Und wenn kein Theilstrich des N. genau an einen Theilstrich des Randes trift, ist

$$Av = xb + \frac{y}{m-1}\, b + \frac{s}{p+s} \cdot \frac{b}{m-1}.$$

Beyspiel. Hätte man auf AB Zolle abgetragen, und jeden in Linien getheilt, so, daß $b = \frac{1}{10}'' = 1'''$ wäre, den Vernier aber CM, dessen Länge $= 101.\,b$, theilte man in 100 gleiche Theile; so wäre ein Theil des Vernier $= \frac{101}{100}b = b + \frac{1}{100}b$, d. i. um $\frac{1}{100}'''$ oder um $\frac{1}{1000}''$ größer als ein Theil des Randes. Mittels dieses Vernier kann man also den Zoll in 1000, den Fuß aber in 10000 gleiche Theile theilen. Wäre CM =

11''';

11'''; so wäre ein Theil des in 10 gleiche Theile getheilten Vernier = 1^{IV} oder 1 Skrupel.

2. Es stelle AB (fig. 142.) einen Theil des in Grade eingetheilten Randes vom Astrolabium (§. 31. Geod.) und CM einen mit dem vorigen eingetheilten Bogen konzentrischen Bogen auf der beweglichen Alhidadenregel vor. Ist nun AB z. B. ein Bogen von 19 Graden, und man theilt MC in 19 + 1 gleiche Theile: so ist CM der Nonius, dessen jeder Theil $= \frac{19}{20}^\circ = 57'$, folglich um $\frac{b}{m+1}$ oder $\frac{1}{20}^\circ = 3'$ kleiner ist, als jeder Theil des eingetheilten Randes, oder das Stückchen ab $= 3'$; cd $= 6'$; ef $= 9'$ u. s. w., dieser Nonius würde folglich die Minuten von 3 zu 3 geben. Man würde demnach die Alhidadenregel um 6' fortrücken müssen, wenn der zweyte Theilstrich des Nonius mit einem auf dem eingetheilten Rande zusammen fallen sollte, und umgekehrt; würde der zweyte Theilstrich der Alhidadenregel mit einem Theilstrich auf dem eingetheilten Rande zusammentreffen: so müßte man noch 2. 3' zu der Anzahl der auf dem letztern abgeschnittenen Graden rechnen, um die wahren Bogen oder Winkel zu haben; so 12. 3' mehr, wenn der 12te Theilstrich mit einem auf dem eingetheilten Rande zusammenträfe, und überhaupt sovielmal 3' mehr, als sich Theilstriche zwischen irgend 2 zusammenfallenden Theilstrichen und der Visirlinie oder der Axe des Fernrohrs befinden. *)

§. 116. Lehrsatz. Zwey Dreyecke ABC, abc (fig. 143.) sind ähnlich I. wenn sie zwey Winkel wechselseitig gleich haben, C = c, A = a; oder II. wenn in ihnen ein Winkel gleich C = c, und die diesen Winkel einschliessenden Seiten proportional sind, AC : ac = BC

*) Weitläufiger handelt hievon Kästner in der vorhin angeführten Abhandl. und Mayer S. 216. u. ff. in 1tem B. seiner prakt. Geom.

= BC : bc; oder III. wenn in ihnen alle Seiten proportional sind, AB : ab = AC : ac = BC : bc.

Beweis von I. Macht man CD = ca und zieht DE || AB: so ist m = A = a, also △ CDE ≅ △ abc (§. 37.); aber △ CDE ∾ △ ABC (§. 112. Zus. 3.); also auch △ ABC ∾ △ abc.

Beweis v. II. Macht man CD = ca und CE = cb, und zieht DE: so ist △ CDE ≅ abc (§. 35.). Nun ist vermöge der Hypothese und der Konstruction AC : DC = BC : EC, folglich DE || AB (§. 112. II.), und △ ABC ∾ △ CDE, folglich auch ∾ △ abc.

Bew. v. III. Unter derselben Konstruktion wie in II. beweißt man eben so, daß DE || AB, folglich CD : AC = DE : AB (§. 112. Zus. 2.), oder AC : ac = AB : DE. Nun ist (p. hyp.) AC : ac = AB : ab, folglich auch AB : ab = AB : DE, und ab = DE (§. 108. Zus.), also △ abc ≅ △ CDE (I), folglich auch ∾ △ ABC.

§. 117. Aufgabe. Auf ab ein Dreyeck zu beschreiben, welches dem △ ABC ähnlich ist.

Auflösung. Man mache a = A und b = B.

§. 118. Aufgabe. Im Dreyecke abc, welches dem Dreyecke ABC ähnlich ist, sind 2 Seiten ab, bc, und im andern ABC ist die homologe Seite AB gegeben: man soll die andere homologe Seite BC finden.

Auflösung. ab : AB = bc : BC.

Geodäsie.

Abstände oder Weiten zu machen. — I. Kann man bey fig. 51. Tab. II. (§. 38. Geod.) AC

BC nicht bis D, E zurücketragen; so darf man auch nur den 3, 4, 8ten Theil von AC nach δ und den ebensovielsten von BC nach ε mit größter Genauigkeit tragen; so wird dann δε der ebensovielste von AB. Denn ist z. B. $C\delta = \frac{1}{4} AC$, und $C\varepsilon = \frac{1}{4} BC$: so ist $C\delta : C\varepsilon = AC : BC$, aber auch der Winkel bey C gleich, folglich (nach §. 116. II.) $AC : C\delta = AB : \delta\varepsilon$, folglich $\delta\varepsilon = \frac{1}{4} AB$, wie $C\delta = \frac{1}{4} AC$. — Das nemliche findet statt, wenn man die proportionellen Stücke Cδ, Cε gar nicht rückwärts tragen könnte, sie folglich nach α und β bringen müßte.

II. Eine Weite AB (fig. 144.) zu messen, zu deren Endpunkten man nicht bequem kommen kann. Auflösung 1. Von willkührlich genommenem Standpunkte C aus setze man bey D einen Stab in der Richtung mit C, B, und bey E einen andern in der Richtung mit C, A. Eben so setze man bey F einen Stab in gerader Linie mit A und D; auf ähnliche Art bey G. Man messe nun alle gerade Linien zwischen je 2 Stäben, und indem man auf dem verjüngten Maßstabe jene Größen nimmt, und dann wie §. 42. verfährt, verzeichne man die einzelnen ähnlichen Dreyecke dec, dfc . . . so, daß die Figur dg auf dem Papiere ähnlich wird der auf dem Felde abgestekten.

Nun ziehe man df, eg, und ec, ed fort, bis sie sich in a und b schneiden; trägt man nun ab auf denselben verjüngten Maßstab; so ist AB soviel Ruthen, Fuße . . lang, als wieviel Theile nach ihrer Bedeutung auf ab gehen.

Denn △ dae ∽ △ DAE, weil, wegen der ähnlichen kleinen Dreyecke, die ganzen Winkel an DE, de wechselseitig gleich (§. 116. I.); eben so ist auch △ dbe ∽ △ DBE; folglich

$$\begin{array}{lrcl} & ad : de & = & AD : DE \\ & de : db & = & DE : DB \\ \hline \text{folglich} & ad : db & = & AD : DB \end{array}$$ (§§. 96, 94. B.)

Daher ist, weil auch der Winkel adb = ADB, nach §. 116. III. △ adb ∽ △ ADB, folglich

$$\begin{array}{lrcl} & ad : ab & = & AD : AB \\ & de : ad & = & DE : AD \end{array}$$ (aus dem vorigen)

$$\begin{array}{lrcl} \text{also} & de : ab & = & DE : AB. \end{array}$$

Auflösung 2. mittels weit entlegner Gegenstände. *) Man messe die willkührliche Standlinie CD (fig. 145. Tab. XII.); bemerke auf welche am Horizonte weit hinaus liegende Gegenstände F, G, die Visirlinien CA, CB treffen. Man messe CE und stelle bey f und g in den Richtungen EF und EG Stäbe auf. Eben so gehe man in der Richtung EF soweit fort, bis ein Gehilfe von D aus den in a aufgestellten Stab in der geraden Linie DA erblickt, und einen zweyten Stab stelle man in der Richtung Eg in b so auf, daß ihn der Gehilfe in der Richtung DB sieht. Beyde Stäbe a, b stehen nun in den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkten obiger Visirlinien, und die gemessene Weite ab ist ein solcher Theil von AB, als ED von der Standlinie CD.

Denn wegen der großen Entfernung der Gegenstände F, G, kann man aE, AC und CB, Eb als parallel annehmen, weswegen △ ACD ∽ △ aED und △ BCD ∽ △ bED. Daher

$$\begin{array}{lrcl} & DA : Da & = & DC : DE \\ & BD : bD & = & DC : DE. \\ \hline \text{also} & DA : Da & = & BD : bD \end{array}$$ (§. 108.)

Daher auch △ ABD ∽ △ abD, und

$$AB : ab = BD : bD = DC : DE.$$

Der

*) Man vergleiche Lamberts Anmerk. und Zus. zur prakt. Geom. im 1ten Th. seiner Beytr. v. S. 1—52.

Der Meßtisch (mensula praetoriana, so genannt von seinem Erfinder, Joh. Prätorius 1537. in Joachimsthal gebohren, einige Jahre Prof. zu Wittenberg, wo er studirt hatte, dann im Jahr 1576. erster Prof. der Mathem. zu Altorf bis an sein Ende 1616.). In seiner einfachsten Einrichtung besteht derselbe 1) aus dem Tischblatte A (fig. 146.), einem gewöhnlichen Reisbrette, von gut ausgetrocknetem Lindenholze und so verfertigt, daß es sich nicht werfen kann; an den 4 schmalen Seitenflächen oder Kanten des Tisches wird ein weisses Papier mit Tischlerleim befestigt und naß aufgezogen, damit es sich beym Trocknen straff anspannt; in der Mitte der untern Seite des Tischblattes befindet sich eine Nuß; 2) aus der Alhidade B, einem beweglichen Liniale von Messing, mit Absehen; 3) aus dem Fuße C (auf die Art, wie oben beym Astrolabium), auf welchem die Mitte des Meßtisches ruht, welcher mittels einer kleinen Wasserwage genau horizontal gestellt wird. *) — Die Zollmann'sche Scheibe **) ist vom Meßtische darin unterschieden, daß sie 1) aus einer runden Scheibe besteht, um deren Mittelpunkt sich 2) die Alhidadenregel mit Diopteren dreht: so daß hier alle Operationen vom Mittelpunkte des Instruments ausgehen.

Auf-

*) Bey einer Messung, die genau seyn soll, kann man sich nicht mit einem solchen einfach eingerichteten Meßtische begnügen. Der Kürze halber müssen wir uns aber hier blos auf die vortreflichen „Beyträge zur Beförderung geometrischer und geographischer Messungen (Frankfurt a. M. 1803.) von H. Tabor, Kurmainz. Hof- und Regierungsrathe" berufen. Nach der Kritik des Marionischen, des Branderschen, Mayerschen, Hogrevschen, des verbesserten (Frankf. 1789.), des Studerschen Meßtisches beschreibt H. Tabor die Einrichtung, die er seinem Meßtische gegeben hat. —

**) S. Zollmanns Geodäsie. Halle 1744.

Auflösung 3. mittels des Meßtisches. Man messe eine willkührlich angenommene Standlinie CD (fig. 147.), bringe entweder den Mittelpunkt des Tisches über C, oder bestimme auf dem Tische den Punkt c, welcher über C lothrecht liegt, (welches mittels der sogenannten Gabel geschieht; sobald das an deren einem Schenkel im Endpunkte herabhängende Loth über C einspielt, giebt der Endpunkt des andern Schenkels auf dem Tische den Punkt c an,) und, nachdem der Tisch horizontal gestellt ist, ziehe man cm, cn in der Richtung der Visirlinien CA, CB, mache dann nach dem verjüngten Maßstabe cd = CD. Man bringe nun den Tisch so über D, daß der Punkt d senkrecht über D und cd in derselben Visirlinie nach einer in C befindlichen Fahne liegt. Zieht man nun nach den Visirlinien DA, DB auf dem Tische da, db: so wird ab in verjüngtem Maße die auf AB kommende Anzahl von Ruthen ... anzeigen, was auf gleiche Art, wie bey den vorigen Auflösungen bewiesen wird.

Auf ähnliche Art kann man auch die 2 andern Aufgaben §. 38. Geod. mit Hülfe des Meßtisches auflösen.

§. 119. Lehrsatz. I. Die ähnlichen Polygone ABCDE, abcde (fig. 129.) werden durch die Diagonalen AC, ac, AD, ad ... aus gleichnamigen Ecken A, a gezogen, in ähnliche Dreyecke getheilt, und II. umgekehrt, wenn 2 Polygone in lauter ähnliche Dreyecke so getheilt werden, daß jedes mit dem folgenden eine Seite gemein hat; so sind die Polygone ähnlich.

Beweis v. I. Vermöge der Hypothese ist nach §. 116. II. $\triangle$ ABC ∽ $\triangle$ abc, folglich AC : ac = BC : bc = DC : dc, und m = n, daher r = s, folglich, wie vorhin, $\triangle$ ACD ∽ $\triangle$ acd. Da auf gleiche Art die

die Aehnlichkeit aller Dreyecke, in welche je 2 ähnliche Polygone getheilt werden können, bewiesen wird: so ist der Satz allgemein wahr.

Bew. v. II. Es erhellt aus der vorausgesetzten Aehnlichkeit der Dreyecke ABC, abc; ACD, acd ..., daß 1) alle Winkel der Polygone nach der Ordnung gleich, B=b; C=c ..., und weil auch AB : ab = BC : bc = AC : ac = Cd : cd ... daß 2) auch alle Seiten dieser Polygone proportional sind.

§. 120. Aufgabe. I. Ueber ab ein Polygon zu beschreiben, welches dem gegebenen ABCDEA ähnlich ist; II. aus einem Punkte O innerhalb des gegebenen Polygons (fig. 148.) oder III. von einer Ecke A aus (fig. 149.) ein diesem ähnliches zu konstruiren.

Auflösung v. I. Man ziehe aus A die Diagonalen AD, AC und mache △ abc ∽ △ ABC; eben so △ acd ∽ △ ACD (§. 117.).

Aufl. v. II. Man ziehe aus O nach allen Ecken gerade Linien OA, OB ... und zwischen diesen beliebige Parallellinien ab, bc ... mit den Seiten des Polygons; so ist, wie aus der Aehnlichkeit der einzelnen Dreyecke erhellt, abcdef ∽ dem großen Polygon.

Aufl. v. III. Diese erhellt aus II.

Geodäsie.

I. Pläne zu verfertigen, 1. von einem zugänglichen Platze ABCDE (fig. 150.). Ist das Terrein erstens offen, so, daß man ohne Hinderniß, nebst den Seiten AB, BC ... auch innerhalb des Platzes

tzes die Diagonalen AD, AC messen kann: so trägt man von einem für seinen besondern Zweck willkührlich verfertigten verjüngten Maßstabe so viel (hier z. B. 104.) Theile = ab auf das Papier, als auf AB Ruthen u. d. g. giengen. Beschreibt man dann mit der Apertur des Zirkels, mit dem man auf dem Maßstabe 142 jener Theile faßte, aus a einen Bogen, und auf ähnliche Art aus b, so ist wenn man ac, bc zieht, △ abc ∽ ABC (§. 39. Zus. 2. vergl. §. 116. I.). Konstruirt man gleicher Weise die ähnlichen Dreyecke acd, aed: so stellt genau die Figur abcde auf dem Papier den bestimmten Platz ABCDE vor. — Wäre z. E. AE eine krumme Linie; so kann man sie, wenn die Krümmung nicht sehr stark, und die Linie nicht lang ist, für eine gerade nehmen, oder man muß mehrere gerade Linien statt ihrer substituiren.

Ist zweytens das Terrein nicht offen, so, daß man innerhalbs die Diagonalen AD, AC nicht messen kann: so mißt man sowohl Seiten als Winkel von außen, trägt jene nach dem verjüngten Maßstabe auf, indem man zugleich die Winkel a, b . . . den Winkeln A, B . . . gleich macht. Da aber hier sowohl in der Zeichnung als Messung leicht Fehler vorgehen; so kann man bisweilen richtiger auf folgende Art verfahren: Es sey die Ebene ABCDE (fig. 151.) blos von aussen zugänglich, so, daß man die Seiten messen kann. Man verlängere nun willkührlich AB bis F, so, daß BF z. B. = 80° werde, und messe FC = z. B. 130°. Eben so verfahre man mit BC, GD. Man könnte auch noch die andern Seiten verlängern, aber, da hier nur noch 3 übrig sind; so genügen jene 2 Verlängerungen. Man mache nun nach dem verjüngten Maßstabe ab = 120 Theilen, verlängere ab bis bf = 80 Theilen; ziehe wieder wie oben aus f und b Bogen mit der gehörigen Apertur, und durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt c die gerade Linie bc, die man bis g verlängert, so, daß cg = 65 Theilen sey. Man beschreibe wieder, wie vorhin, aus g und c mit gehöri-

höriger Apertur Bogen die sich in d schneiden, und ziehe dc. Verfährt man eben so in Betreff der noch übrigen Seiten: so ist wieder abcde ∽ ABCDE wegen der gleichen Winkel und der Proportionalität der Seiten.

2. von einem unzugänglichen Platze, wovon ein Theil begrenzt seyn soll von den Seiten AB, BC, CD (fig. 152.). Man wähle sich auf der Erde einen schiklichen, möglichst nahen Punkt E aus, und messe mit Hilfe eines Winkelinstruments die Winkel AEB, AEC; AED ... Eine zweyte Station sey in F, von wo aus man die nämlichen Punkte sehen, folglich die Winkel EFA, EFB, EFC, EFD messen kann. Nachdem man die Standlinie EF gemessen hat, ziehe man auf dem Papier ef = 150 Theilen von verjüngtem Maßstabe, und mache an e, f Winkel, welche denen an E, F auf der Erde gleich sind, mittels der geraden Linie, welche sich in den Punkten a, b, c, d schneiden. — Auf dieselbe Art verfährt man in Ansehung der andern Seiten des Platzes.

Will man sich zu demselben Zwecke (nämlich eine Figur auf dem Felde zu Papier zu bringen, oder in Grund zu legen) des Meßtisches bedienen, z. B. wenn man von der Ecke A aus (fig. 149.) die ganze Figur überschauen kann: so bringe man den Punkt a des Meßtisches über A (§. 118. Geod. Aufl. 3.), ziehe auf dem Meßtische gerade Linien in der Richtung aE, aD, aC, aB; messe die Grenzen der Figur, und trage sie nach dem verjüngten Maßstabe von a nach η, von a nach δ u. s. w. auf. Zieht man nun $\eta\delta$, $\delta\gamma$... so ist die Figur AEDCB ... in Grund gelegt. — Oder soll z. B. von der angenommenen Standlinie EF (fig. 152.) aus die Figur ABCDGH aufgenommen werden: so wird der Meßtisch über E gebracht, und nach den Richtungslinien EA, EB ... werden gerade Linien auf dem Tische gezogen; die gemessene EF in verjüngtem Maße aufgetragen, und wie oben (§. 118. Geod.) der Punkt f auf dem Meßtische dann so

über

über F gebracht, daß die gerade Linie ef auf demselben nun in der zweyten Station in derselben Richtung mit EF auf dem Felde liegt. Zieht man nun abermals in den Richtungen nach denselben Punkten A, B... gerade Linien, so werden sich diese nun durchschneiden, und so die entsprechenden Punkte a, b... auf dem Tische angeben, welche eben die Lage gegen ef auf dem Tische, wie A, B.. gegen EF auf dem Felde, haben. Folglich geben die zwischen diesen Punkten a, b.. auf dem Tische gezogenen Linien die der vorgegebenen Figur ähnliche Figur.

II. Die umgekehrte Aufgabe ist, einen Riß auf das Feld überzutragen, z. B. den Plan abcde (fig. 149.) auf ein freyes Terrein zu tragen. Man hefte den Plan auf ein wohlpolirtes Brett, welches auf einem Stabe von 3—4′ hoch ruht, oder hefte ihn auf den einfachen Meßtisch; um a bewege sich ein Diopterlinial. Mit Hilfe dieses Linials messe man vorerst alle gerade Linien ae, ad.. nach den Ecken, welche Maße denselben, wie in der Figur, beygeschrieben werden. Man bringe dann den Punkt a über A auf dem Felde, wo man anfangen will, den Plan abzutragen. Indem man nun durch die Dioptern in der Richtung ab visirt, lasse man den Stab B in der Entfernung einsetzen, daß AB = 97 Ruthen oder Fuße wird, je nachdem die Theile von ab ihre Bedeutung haben. Indem man dasselbe in Ansehung der übrigen Ecken thut, so sind B, C, D, E, A die entsprechenden Punkte auf dem Felde ꝛc. — Ist aber das Feld nicht frey, wie wenn z. B. abcde ein Plan zur Befestigung rings um eine Stadt herum vorstellte: so müßte man auch noch die Winkel des Risses genau kennen, und diese auf dem Felde, wie die Seiten AB, AC... von derselben Größe, wie auf dem Plane, ziehen.

§. 121. Lehrsatz. In zwey ähnlichen Polygonen ABCDE, abcde (fig. 129. Tab. X.) verhalten sich die

Pe-

Perimeter, wie jede zwey homologe Seiten, d. i. wie AB : ab oder wie BC : bc...

Beweis. Durch die Voraussetzung ist AB : ab = BC : bc = CD : cd .... also AB + BC + CD ...: ab + bc + cd ... = AB : ab oder = BC : bc .... (§. 98. B.).

Zusatz 1. Sind also zwey reguläre Figuren von gleichviel Seiten in Kreisen beschrieben (fig. 153. Tab. XIII.): so verhalten sich ihre Perimeter, wie die Durchmesser dieser Kreise AF, af. Denn da diese Polygone ähnlich sind (§. 109. Zus. 1.): so verhalten sich ihre Perimeter = AB : ab. Aber AB : ab = AC : ac. Denn nebst ACB = acb, deren jeder = 1/n 360° ist, sind auch die Winkel an AB, ab wechselseitig gleich (§. 94. Zus. 1.); folglich △ ACB ∾ △ acb. Also verhalten sich auch die Perimeter, wie die Radien AC, ac; also auch wie die Durchmesser.

Zusatz 2. Also verhalten sich die Kreislinien, wie ihre Durchmesser oder Halbmesser (§. 93. Zus. 2.).

Zusatz 3. Also ist das Verhältniß der Kreislinie zu ihrem Durchmesser in allen Kreisen einerley. Denn wenn P, p diese Kreislinien, und D, d ihre Durchmesser bezeichnen: so ist P : p = D : d (Zus. 2.), oder P : D = p : d.

§. 122. Lehrsatz. Wenn in 2 regulären Figuren von gleichviel Seiten die Centriwinkel ICD, icd gleich sind: so sind 1. die gebrochenen Linien IABD, iabd, 2. die ausgeschnittnen Theile ICDBAI, icdbai und 3. die abgeschnittenen IDBAI, idbai ähnlich.

Be-

Beweis. Durch die Halbmesser, nach den Ecken I, A .. i, a ... gezogen, werden die ausgeschnittenen Theile in ähnliche Dreyecke, wie §. 121. Zus. 1. bewiesen wurde, und zwar in gleichviel ähnliche Dreyecke getheilt; denn man setze ICA sey = 1/r ICD: so ist auch ica = 1/r ICD = 1/r icd (durch die Voraussf.). Also sind 1. die abgeschnittenen Theile, also auch 2. die genannten gebrochenen Linien ähnlich (s. d. Bew. im §. 121.). 3. △ ICD ∽ △ icd (§. 116. II), folglich CID = cid, und CDI = cdi; folglich auch DIA = dia, und IDB = idb; ferner CI : ci = ID : id; aber auch IA : ia = CI : ci, also ID : id = IA : ia = AB : ab = BD : bd ... also auch die Segmente ähnlich (§. 109.).

Zusatz. Also sind Bogen von gleichen Centriwinkeln oder gleich viel Graden, und Kreisausschnitte und Abschnitte von gleichen Centriwinkeln oder ähnlichen Bogen ähnlich (§. 93. Zus. 2.).

§. 123. Lehrsatz. In zwey ähnlichen Dreyecken ABC, abc (fig. 154.) sind die aus einem gleichen Winkel A = a gefällten Lothe, oder die Höhen der Dreyecke, den Seiten derselben proportional.

Beweis. △ ABD ∽ △ abd, wie leicht erhellt, folglich AD : ad = AB : ab, also auch = BC : bc = AC : ac (p. hyp.)

Es bleibt derselbe Beweis, wenn die Lothe auf die Verlängerungen der Grundlinien fallen.

Geodäsie.

Die Höhe zu finden 1. von einem Gegenstande, zu welchem man frey gehen kann, z. B. einem Thurme (fig. 62. Tab. V.) Diese Aufgaben zu lösen, hat man mehrere hieher gehörige Methoden, welche aber insgesammt nicht die größte Genauigkeit geben.

a. Man messe BC und den Winkel C, da nun B = R: so kann man ein dem △ ABC ähnliches Dreyeck abc konstruiren, wo dann bc : BC = ab : AB, d. i. die Höhe AB gefunden werden kann.

b. Mittels des Schattens, indem man den Stab DE senkrecht errichtet, dessen Endpunkt in der geraden Linie des Sonnenstrales AC liegt; dann ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren CD : CB = DE : BA.*)

c. Oder man errichtet auf dieselbe Art einen größern Stab FG, so daß man vom Endpunkte E des kleineren senkrecht errichteten Stabes DE die Punkte G und A in einer geraden Linie erblikt. Denkt man sich EL ‖ CB gezogen; so ist, wie vorhin, EH : EL = GH : AL, wo alles wegen BC = EL durch Messung bekannt ist, folglich auch AB = AL + LB, indem LB = ED.

d. Mittels optischer Grundsätze. Legt man nämlich z. B. in C horizontal einen Spiegel, oder ist bey C ein Grübchen mit Wasser gefüllt, und der Beobachter erblikt in der Entfernung CI nach der Sehlinie OC im Spiegel oder in der Wasserfläche das äußerste Ende des Thurmes: so ist, wie man sich auszudrücken pflegt, der Einfallswinkel r = dem Ausfallswinkel s; folglich △ BAC ∽ △ COI; daher CI : IO = BC : AB.

2. Die Höhe AB (fig. 155.) eines Gegenstandes zu finden, zu welchem man nicht in ei-

*) Thales Messung der Pyramiden aus dem Schatten ist wohl die früheste, uns bekannte, Anwendung dieser Methode (m. s. Kästner's Geschichte der Math. Einl. S. 2—3.).

einer horizontalen, aber doch in der schiefen Richtung CB kommen kann. — Man messe CB, den Winkel CBA, und indem man das Astrolabium nach C bringt auch den Winkel BCA. Indem man nun ein ähnliches Dreyeck koustruirt; findet man AB, wie oben. Kann man aber den Winkel B nicht schiklich nehmen: so stelle man den Durchmesser des Astrolabiums horizontal und messe den Winkel BCD = rCa; man weiß dann auch im rechtw. △ CDB den Winkel CBD, daraus auch dessen Nebenwinkel ABC. Das übrige wie vorhin.

3. Die Höhe eines ganz unzugänglichen Gegenstandes zu finden. Man messe eine schikliche horizontale Standlinie EC, und nachdem man die Winkel an E und C gemessen, construire man eine Figur, welche ähnlich ist der Figur AECB ꝛc.

§. 124. Lehrsatz. Zieht man aus dem rechten Winkel AIB (fig. 156.) eines rechtwinkligen Dreyecks ABI eine senkrechte Linie ID auf die Hypotenuse: so schneidet diese 1) das Dreyeck in zwey Dreyecke ADI, DBI welche sowohl dem ganzen Dreyecke, als einander selbst ähnlich sind, und ist 2) die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten der Hypotenuse AD, DB.

Beweis 1). △ ABI ∽ △ BDI (§. 116. I.) und m = n; eben so △ ABI ∽ △ ADI und r = B; folglich ist nun auch △ ADI ∽ △ BDI. 2) Daher gilt die Proportion für die homologe Seiten AD : DI = DI : DB.

Zusatz 1. Also ist jede senkrechte Linie aus einem Punkte I der Peripherie eines Kreises auf den Durchmesser AB die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Durchmessers (§. 87. Zus. 2.).

Zusatz 2. Aus der Aehnlichkeit jener ΔΔ folgt, daß auch IB die mittlere Proportionallinie ist zwischen AB, DB, so wie AI zwischen AB, AD.

§ 125. Aufgabe. Zwischen 2 gegebenen geraden Linien AD, DB die mittlere Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Dieß geschieht leicht dem Lehrsatze gemäß.

Zusatz. Aus Zus. 2. §. 124. erhellt leicht, wie man zwischen der ganzen AB und einen Theil BD, oder AD die mittlere Proportionallinie suchen müsse.

Geodäsie.

Man soll die Länge einer entweder ganz oder nur zum Theil unzugänglichen geraden Linie AB (fig. 158. Tab. XIV.) finden.

Man errichte im Endpunkte B das Loth BC, indefinit, verbinde irgend einen schiklichen Punkt E dieses Lothes mit A und errichte auf EA im Punkte E das Loth ED, begrenzt von der verlängerten AB. Nun ist BE die mittlere Proportionallinie zwischen BD, die man genau mißt, und AB; folglich $3:7 = 7:AB$, oder $AB = 16, 33$.

Kann man nicht füglich im Endpunkte B das Loth errichten, wie dieß der Fall bey fig. 159. ist: so verlängere man AB z. B. bis C, errichte das Loth CE, und in willkührlich angenommenem Punkte ein anderes, EF bis zum willkührlich angenommenen Punkt F. Zieht man nun FA, welche CE im Punkte D schneidet: so ist Δ ACD ∽ Δ DEF, wo folglich $DE : DC = EF : AC$, woraus man, weil die 3 ersten Linien können gemessen werden, AC folglich auch $AB = AC - BC$ findet.

§. 126.

§. 126 Lehrsatz. I. Schneiden sich zwey Sehnen AE, IG (fig. 160.) innerhalb dem Kreise in o; so sind die Theile der einen Sehne, Ao, oE den Theilen der andern, Go, oI umgekehrt proportional. II. Schneiden sich zwey verlängerte Sehnen AE, FH ausserhalb dem Kreise in B; so verhalten sie sich umgekehrt, wie ihre ausserhalb dem Kreise liegenden Theile HB, EB. III. Wenn man aus B eine Tangente BD und Sekante BA, zieht; so ist BD die mittlere Proportionallinie zwischen der Sekante und ihrem ausserhalb dem Kreise liegenden Theile EB.

Beweis v. I. Man ziehe IE, AG: so ist △EIo ∽ △AGo (§. 116. I. indem d. W. AEI = IGA ꝛc.), also Ao : oI = oG : oE (denn diese Seiten sind homolog).

Beweis v. II. Man ziehe AH, IE: so ist △FEB ∽ △ABH (denn F = A ꝛc.), also AB : FB = HB : EB.

Beweis v. III. Zieht man AD, DE: so ist △BDE ∽ △BAD (denn der Winkel BDE = BAD (§, 90. Zus.) ꝛc.); also AB : BD = BD : BE.

Anmerkung.

Man sieht, daß man zwischen den gegebenen geraden Linien AB, EB nach III. ebenfalls eine mittlere Proportionallinie finden kann, wenn man aus AB BD abschneidet, über AE, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, und aus B eine Tangente BD zieht.

§. 127.

§. 127. Aufgabe. Eine gegebene gerade Linie BD so zu theilen, daß sich die ganze zum größeren Theil verhält, wie dieser zum kleineren (secare media et extrema ratione.)

Auflösung. Mit CD der Hälfte der gegebenen Linie BE ziehe man einen Kreis, errichte in D eine Tangente DB = der gegebenen Linie (§. 91); ziehe aus B durch C die Sekante BA, und mache Bm = BE; so ist nach §. 126. III. AB : BD = BD : BE, oder AB — BD : BD = BD — BE : BE (§. 97. B.) d. i. Bm : BD = Dm : Bm, oder BD : Bm = Bm : Dm.

Anmerkung 1.

Es sey a diese Zahl, die in 2 Zahlen x, y auf die Art, wie BD, getheilt werden soll, und $x > y$; so ist weil $a = x + y$, $y = a - x$; folglich $a : x = x : a - x$ daher $x = \sqrt{\left(\frac{5a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$ und $y = \frac{3a}{2} - \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$ oder wenn z. B. $a = 2$; so kann man jene 2 Theile in Irrationalzahlen $(\sqrt{5}) - 1$ und $3 - \sqrt{5}$ ausdrücken, deren Summe = 2 (verg. B. S. 47. Anm. 3. 4.); eben so ist auch das Quadrat der größeren Zahl, gleich dem Produkte der beyden äussersten, nämlich $= 6 - 2\sqrt{5}$ (§. 46. B.).

Anmerkung 2.

Auch aus dem Satze III. §. 126. erhellt 1. daß jede Tangenten DA, DB (fig. 115. Tab. VIII.), aus demselben Punkte D auf die Kreislinie gezogen, gleich sind, indem eine wie die andere in demselben Verhältniße zu derselben Sekante DE und ihrem ausserhalb dem Kreise liegenden Theile eD steht. Woraus ferner 2. erhellt, daß

daß man aus D nur 2 Tangenten ziehen könne. Denn wäre eine dritte eine Tangente: so würde sie gleich seyn DA, DB, folglich von einer derselben nicht verschieden. 3. Soviel man auch Sekanten aus D (z. B. zu m, n) ziehen mag, so wird doch das im Satze ausgedrükte Verhältniß der Tangente nicht geändert.

§. 128. Aufgabe. Es sey der Halbmesser eines Kreises gegeben, man soll die Seite eines eingeschriebenen regulären Dekagons finden.

Auflösung. Man theile AC (fig. 161.) nach §. 127., mache AB = DC dem größeren Theile: so ist diese Sehne die verlangte Seite des regulären Zehnecks.

Beweis. Die △△ ABC, ABD, welche A gemeinschaftlich haben, sind ähnlich (§. 116. III.), daher o = r. Nun ist n = 2r (§. 57. Zus. 2.), aber n = m (§. 39.), also m + n + o = 5r = 180°, oder 10r = 360°. Also kann man den Winkel r 10mal um C bilden, daher auch den Bogen AB und die Sehne 10mal im Kreise auftragen.

Zusatz. Zieht man von A nach E, und von E nach F u. s. w. Sehnen; so hat man das reguläre Pentagon eingeschrieben.

§. 129. Aufgabe. Die Seite des regulären Pentadekagons zu finden.

Auflösung. Man schreibe im Kreise das gleichseitige Dreyeck ABC (fig. 162.) ein, und aus demselben Punkte A das reguläre Fünfeck (§. 128. Zus.) ADEFG; die Sehne des Bogens BE ist die gesuchte Seite.

Beweis. Zieht man den Bogen EF, den fünften

Theil

Theil der Kreislinie, vom Bogen BEFC, dem 3ten Theile, ab: so bleiben übrig die Bogen $BE + CF = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$; da nun BE=CF, wie leicht zu zeigen: so ist $BE = \frac{1}{15}$, d. i. der 15te Theil der ganzen Peripherie.

§. 130. Lehrsatz. I. Wenn vier gerade Linien proportional sind, A : a = b : B (fig. 163.); so ist das Rechteck M unter den äussersten gleich dem Rechtecke N unter den mittleren. II. Sind drey gerade Linien stetig proportional, oder ist a = b: so ist das Rechteck M unter den äussersten gleich dem Quadrate N der mittleren. III. In gleichen Rechtecken M, N verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen, oder A : a = b : B.

Beweis v. I. Man verbinde M und N unter einem rechten Winkel, und ergänze das Rechteck X: so ist M : X = A : a (§. 111. Zus.) und N : X = b : B; also M : X = N : X (vermöge der Voraussᐧ und §. 108.) folglich M = N (§. 108. Zus.) oder CD. EC = FG. GH.

Beweis v. II. Ist a = b: so ist N ein Quadrat, und N = M, nach I, oder FG^2 = CD. EC.

Beweis v. III. M : X = A : a und N : X = b : B, aber M : X = N : X (§. 106. I.), folglich A : a = b : B.

Zusatz. Wie kann man den Sätzen I. II. gemäß die Sätze des §. 126. ausdrücken? So kann auch nr. 3. der Anm. 2. §. 127. so ausgedrückt werden: soviel man auch Sekanten aus D ziehen mag, so sind doch die Rechtecke

ecke Dm. Dr, Dn. Do u. s. w. dem Quadrate derselben Tangente gleich, folglich selbst gleich.

Anmerkung 1.

In fig. 115. stelle eD die Höhe des Pico auf Teneriffa, welche = 21120 engl. Fuße sey, und DA den scheinbar horizontalen Abstand bis zum Punkte A, wo dem vom Berge zurückgehenden Beobachter der Gipfel D des Berges verschwindet, vor. Diese horizontale Linie sey = 940935,42 englische Fuße. Da nun DE + eD = AD^2 (§. 126. III.): so ist $940935{,}42^2$ (= 885359481600.) : 21120 = DE = 41920430; folglich der Durchmesser der Erde eE = DE — De = 41899310 engl. Fuße. Setzt man 1 engl. Fuß : 1 par. Fuß = 13515 : 14400, so machen jene beynahe 39324248 par. Fuß aus; da ferner 22869 par. Fuß = 1 geogr. Meile sind: so erhält man für den Durchmesser der Erde eE 1719 geogr. M. beynahe dieselbe Zahl, wie sie nach Klügel angenommen wird.

Dieß war die Methode des berühmten Mathematikers Franz Maurolycus, aus Messina (gest. 1575), den Erddurchmesser zu bestimmen. Allein Heberden giebt in den Phil. Transact. Vol. 27. p. 356. jene Höhe des Pico nur zu 15396 engl. Fuße = 2405, 6 franz. Toisen an. Chimborasso, der (soviel man bis itzt weiß) der höchste Berg der Erde (ihm soll jedoch, nach Moliva's Versuch einer Naturgeschichte von Chili, Descambesado in Chili an Höhe nichts nachgeben), hat nach Condamine nur 21,136 franz. Fuß, nach Neueren noch nicht 20000.

Nach derselben Methode kann auch die Höhe der Mondsberge gemessen werden. Es sey DCA ein erleuchteter Mondstheil, D die Spitze eines Berges, wo die Beleuchtung ihren Anfang genommen habe. Man habe mit Hülfe eines Teleskops gefunden, wie viele Theile

vom

vom Mondsdurchmesser eE auf die die Mondskugel in A berührende Linie DA kommen. Nun ist, wie vorhin $DA^2 = DE. ED, = (eD + eE). eD.$ Nach einer Beobachtung des Riccioli war der Abstand des St. Catharinenberges von der Lichtgrenze in A ungefähr der 16te Theil des Mondsdurchmessers, folglich, wenn man diesem, wie gewöhnlich, zu 465 geogr. Meilen annimmt, $DA = 29$, davon das Quadrat $= 841 = (eD + 465). eD = eD^2 + 465. eD.$ Durch Complirung des Quadrats und Ausziehung der Wurzel findet man $eD = 1, 8$ geogr. Meilen = 41165 franz. Fuße. *)

Anmerkung 2.

Zwischen 2 gegebenen geraden Linien QR, ST (fig. 157. Tab. XIII.) zwey mittlere Proportionallinien zu finden. — Man ziehe indefinit VX, VY unter einem rechten Winkel, mache VZ = QR und VW = ST; beschreibe mit der Weite QR aus W bey A einen Bogen, eben so aus Z mit ST, der den vorigen bey A durchschneidet (oder was dasselbe ist, man ergänze das Rechteck), und ziehe ZW und AV (Diagonalen jenes Rechteckes). Man lege nun an A ein Linial, setze des Zirkels einen Fuß in B, rücke sowohl das Linial an A, als auch den andern Fuß des Zirkels solange bis BD = BC und die 3 Punkte C, A, D zugleich am Linial liegen. Zieht man nun DC: so sind ZD und WC die verlangten zwey mittleren Proportionallinien.

Diese Methode ist ihrem Wesen nach die des Philo von Byzanz, nach welcher man, statt den Zirkel anzulegen, aus B einen Kreis mit BV zieht: dieser geht auch durch W, A, Z. Legt man nun ein Linial so an A,

*) Schröter giebt die größte Höhe eines Mondsberges nur zu 25000 f. F. an, woraus die Unrichtigkeit der Beobachtung des Riccioli folgen würde.

A, daß AD = CE wird: so sind ZD und WC 2 mittlere Proportionallinien.

Beweis. CA . CE = CV . CW ($= T^2$ dem Quadrate der Tangente), und eben so DE . DA = DV . DZ. Aber weil CE = AD, so ist auch CA = ED, daher CA . CE = DE . DA, folglich auch CV . CW = DV . DZ oder CV : DV = DZ : CW. Nun ist WA || VD, also VC : DV = CW : $\begin{cases} AW \\ VZ \end{cases}$, also auch VZ : CW = CW : DZ. 2) Oder es ist CW : DZ = VZ : CW = DV : VC (aus dem vorigen) = DZ : $\begin{cases} AZ \\ VW \end{cases}$ (weil AZ || VC); d. i. CW : DZ = DZ : VW. Also ist VZ : CW ; DZ : VW.

b. Methode des Plato. Es seyn AB, BC (fig. 157. 2te), jene Linien, die man unter einem rechten Winkel verbindet und indefinit verlängert. Man lege nun einen Winkelhacken, an dessen einen Schenkel sich ein auf ihn senkrechtes Linial verschieben läßt, so an D, daß ein Schenkel durch A, und das an E gelegte Linial durch den Endpunkt C von BC geht: so hat man BD, BE die zwey gesuchten mittlern Proportionallinien.

Beweis. AB : BD : BE (§. 124.), eben so BD : BE : BC, also AB ; BD : BE ; BC.

c. Methode des Cartesius. Wie beym Proportionalzirkel bewegen sich 2 Liniale um Y (fig. 157 3te) an welchen 3 Winkelhacken angebracht werden, die so untereinander in B, C, D, E, F, G verbunden sind, daß bey dem Oefnen der Liniale der Winkelhacken BC den an YZ, dieser (CD) den Winkelh. DE an YX u. s. w. in Bewegung setzt, sobald aber die Liniale zusammengelegt werden, jene Punkte B, C, D . . . in dem einzigen Punkte A zusammenfallen. Es sey nun die kleinere gegebene Linie YB, die größere YE; man lege den ersten Winkelhacken an B, wo man ihn befestigt, und öfne die Liniale bis die Seite des dritten Winkelhackens durch E geht;

geht; YC, YD werden dann zwischen jenen die mittleren Proportionallinien seyn.

Beweis. Das Dreyeck YDC ist in C rechtwinklig, und CB auf die Grundlinie YD senkrecht, folglich YB : YC : YD (§. 124. Zus. 2.); eben so YC : YD: YE; folglich YB : YC : YD : YE.

Diese letzte Methode ist zwar auch mechanisch, wie die vorigen, hat aber, ist nur das Instrument richtig, vor diesen den Vorzug, indem man 1. nach letzterm nur Versuchsweise Linial und Winkelhacken anlegen kann, 2. weil man nach ersterer Methode mehrere mittlere Proportionallinien zu finden im Stande ist, z. B. 4, wenn man 5 Winkelhacken anwendet. Die Lösung dieser Aufgabe war wahrscheinlich darum den alten Geometern so wichtig, weil man durch die Auffindung zweyer mittleren Proportionallinien das berühmte Delische Problem, und überhaupt die Aufgabe, jeden geometrischen Körper nach einer gegebenen Proportion zu vermehren oder zu vermindern, zu lösen vermag.

§. 131. Aufgabe. Ein gegebenes Rechteck AE (fig. 164.) in ein Quadrat von gleichem Flächenraume zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere AB, daß BD=BE wird, ziehe über AD, als Durchmesser, einen Halbkreis; so ist das Loth BI die Seite des gesuchten Quadrats (§. 124. Zus. vergl. mit §. 130.), oder BH=AE.

Zusatz. 1. Also kann man jede geradlinige Figur in ein gleiches Quadrat verwandeln (§§. 74. Zus. 104. 72.)

Zusatz 2. Wüßte man daher genau, um wie viel z. B. die Peripherie eines Kreises größer sey, als der

Halb-

Halbmesser, z. B. wäre jene 3 Schuh, wenn dieser = 1′ wäre: so könnte man auch jeden Kreis in ein ihm völlig gleiches Quadrat verwandeln (§. 104. Zus. vergl. mit §. 121. Zus. 3.).

§. 132. Lehrsatz. Zwey Rechtecke M, N, (fig. 165.), ingleichen 2 Parallellogramme und zwey Dreyecke sind in zusammengesetztem Verhältniße ihrer Höhen und Grundlinien.

Beweis. M : X = A : a und X : N = B : b, also MX : NX = AB : ab, d. i. wenn B, b die Grundlinien und A, a die Höhen sind, die Rechtecke M, N sind im zusammengesezten Verhältniße ihrer Grundlinien und Höhen.

Nun sind die Parallellogramme den Rechtecken, welche einerley Grundlinien und Höhe mit jenen haben, gleich, also sind auch jede zwey Parallellogramme, folglich auch jede zwey Dreyecke, im zusammen gesetzten Verhältniße ihrer Höhen und Grundlinien.

Zusatz. Also sind Rechtecke im zusammengesetzten, und Quadrate im duplizirten Verhältniße ihrer gleichnamigen Seiten.

§. 133. Lehrsatz. Wenn in zwey Parallellogrammen DH, AG (fig. 165.) oder Dreyecken DEF, ABC die Höhen EI, Ci den Grundlinien DF, AB proportional sind: so verhalten sich jene Figuren wie die Quadrate ihrer Grundlinien, oder wie die Quadrate ihrer Höhen.

Be-

Beweis. $DH : AG = EI . DF : Ci . AB$ (§. 132). Aber nach der Voraussetzung $EI : Ci = DF : AB$, und daraus $EI . DF : Ci . AB = EI^2 : Ci^2 = DF^2 : AB^2$ (§. 95. Zus. 1. B.), folglich $DH : AG = EI^2 : Ci^2 = DF^2 : AB^2$.

Dasselbe gilt von den Dreyecken, als den Hälften der Parallelogramme.

Zusatz 1. Also sind jede zwey ähnlichen Dreyecke, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten (§. 123.).

Zusatz 2. Aus Zus. 1. und §. 111. erhellt leicht, daß die Quadrate der Sehnen AI, AH (fig. 156.), aus demselben Endpunkte des Durchmessers gezogen, sich verhalten, wie die von den aus ihren Endpunkten gefällten Lothen ID, HE abgeschnittenen Theile des Durchmessers AD, AE. Denn $\triangle AID : \triangle AIB = AI^2 : AB^2 = AD : AB$.

Eben so ist auch $AB^2 : AH^2 = AB : AE$, folglich (componendo) $AI^2 : AH^2 = AD : AE$.

§. 134. Lehrsatz. Aehnliche Polygone (fig. 129. Tab. X.) verhalten sich, wie die Quadrate zweyer gleichnamigen Seiten, wie $AB^2 : ab^2 \ldots$

Beweis. $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$, eben so $\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ (§§. 119. I., 133 Zus. 1.) u. s. w. d. i. jede 2 Dreyecke verhalten sich, wie $AB^2 : ab^2$. Daher $\triangle ABC : abc = \triangle ACD : acd \ldots = AB^2 : ab^2$. Die Summe der Vorderglieder ist = dem Polygon ABCD ... und die der Hinterglieder = dem Polygon abcd ... folglich jenes Polygon zu diesem, wie $AB^2 : ab^2$ (§. 98. B.).

Zu-

Zusatz. Also verhalten sich ähnliche Kreisausschnitte ICDBAI, icdbai (fig. 153.) wie die Quadrate der Halbmesser, und ähnliche Kreisabschnitte IDBAI, idbai wie die Quadrate ihrer Sehnen DI, di (§. 93. Zus. 2.)

§. 135. Lehrsatz. Reguläre im Kreise beschriebenen Polygone von gleich viel Seiten verhalten sich, wie die Quadrate der Durchmesser, AF, af, oder der Radien AC, ac.

Beweis. Diese Polygone, als ähnliche Figuren (§. 109. Zus. 1.) verhalten sich $= AB^2 : ab^2$ (§. 134.). Nun verhalten sich die Seiten wie die Perimeter (§. 121.) und diese, wie die Durchmesser der Kreise (das. Zus. 1.), d. i. $AB : ab = AF : af$, folglich $AB^2 : ab^2 = AF^2 : af^2$ (§. 96. Zus. B.), also verhalten sich jene Polygone auch wie $AF^2 : af^2$, oder auch wie $AC^2 : ac^2$.

Zusatz 1. Also verhalten sich die Kreisflächen eben so (§. 93. Zus. 2.) d. i. $C : c = D^2 : d^2 = R^2 : r^2$.

Zusatz 2. Also ist auch $C : D^2 = c : d^2$ oder $C : R^2 = c : r^2$ d. i. das Verhältniß der Kreisflächen zum Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser ist in allen Kreisen einerley.

Anmerkung.

Aus den §§. 134, 135, 124 lernen wir jede geradlinige Figur und den Kreis im gegebenen Verhältniße zu vermehren oder zu vermindern. Wäre z. B. BD (fig. 156.) die Seite eines Pentagons (p), und $AD = 5BD$: so würde das über DI errichtete ähnliche Pentagon (P) 5mal größer als p seyn. Denn da überhaupt, wenn

3 Grös-

3 Größen stetig proportional sind (wie $a : ae : ae^2$), die erste zur dritten im duplizirten Verhältniße der ersten zur zweyten, oder der zweyten zur dritten ist, folglich auch bey $BD : DI : DA$ sich verhält $BD : DA = BD^2 : DI^2 = 1 : 5$; aber auch $p : P = BD^2 : DI^2$, also auch $= 1 : 5$.

Weiß man daher 2 homologe Seiten z. B. ab (fig. 153.) $= 2'$, $AB = 6'$: so kennt man auch das Verhältniß der Figuren p, P selbst. Nämlich $p : P = 2 : 18 = 1 : 9$, indem man nämlich nur zu 2 und 6 die dritte stetige Proportionalzahl sucht, was dasselbe ist, als wenn man setzte $p : P = 2^2 : 6^2$.

Und umgekehrt, weiß man das Verhältniß ähnlicher Figuren, so kennt man eben dadurch das Verhältniß zweyer homologen Seiten, indem diese im subduplizirten Verhältniße (§. 95. B.) der Figuren sind. Ist z. B. $p : P = 4 : 9$; so verhalten sich p 2 gleichnamige Seiten $= \sqrt{4} : \sqrt{9}$, oder man dürfte nur zwischen 4 und 9 die mittlere geometrische stetige Proportionalzahl suchen; so $4 : 6 : 9$, wo denn die 2 homologen Seiten sich verhielten $= 4 : 6$ oder $= 2 : 3$.

Will man daher einen nach dem verjüngten Maßstabe m gefertigten Plan oder Grundriß doppelt, dreyfach größer zeichnen: so darf man den Maßstab M zu letzterm nicht auch doppelt, dreyfach größer als m machen, (sonst würde der eine 4 oder 9mal größer werden, als der gegebene Plan). Sondern man muß zwischen einer Seite des Quadrats des Maßstabes m und seinem Doppelten oder Dreyfachen die mittlere Proportionallinie suchen, welche die Seite des Quadrats zu M giebt. Soll ein Plan nur z. B. zur Hälfte verjüngt werden; so sucht man zwischen einer Seite des Quadrats seines Maßstabes M und dessen Hälfte eine mittlere Proportionallinie, welche als der verlangte Maßstab m dient, u. s. w. Ist BC (fig. 158. III. Tab. XI.) kein Quadrat: so nimmt man,

statt

statt der Seite des Quadrats des Maßstabes, die Seite AC. Im Allgemeinen: das in Grund gelegte Stück Feld P (fig. 166.), wobey man sich des Maßstabes M bediente, soll so verjüngt werden, daß ist $P : p = n : 1$: wie groß müssen die Ruthen auf m seyn, daß die Fläche p in diesem Verhältniße kleiner wird als P?

Aus dem vorigen erhellt, daß seyn müsse $M : m = \sqrt{n} : \sqrt{1}$, d. i. daß $m = \frac{M}{\sqrt{n}}$ müsse genommen werden. Theilt man dann diese Größe $\frac{M}{\sqrt{n}}$ oder $\frac{M.\sqrt{n}}{n}$ in soviel gleiche Theile oder Ruthen, als M Ruthen enthält; so wird der Riß oder die Figur p nach den Ruthen des Maßstabes m gezeichnet, n^mal kleiner als P.

Es enthalte z. B. M 50 Ruthen, und p soll 3mal kleiner werden als P. Man messe M oder 50 Ruthen auf einem beliebigen 1000theilgen Maßstabe, und finde solche z. B. = 900 Theilen. Daher wird $m = \frac{900.\sqrt{3}}{3}$ = 519,6, oder beynahe 520 solchen Theilen von gebrauchtem verjüngten Maßstabe gleich seyn. Nimmt man also diese 520 Theilchen von letzterem Maßstabe, und theilt die erhaltene Länge in 50 gleiche Theile: so hat man auf m die Ruthen, die jener Bedingung Genüge leisten.

Um nun die Verjüngung der Figur P vorzunehmen, hat man mehrere praktische Hilfsmittel:

A. Man verzeichne mit Bleistiftlinien über P das Parallellogramm CE, welches in lauter kleine Quadrate vertheilt ist, messe nach M alle Seiten von CE und verzeichne nach m das ähnliche Parallellogramm ce, das in gleichviel kleine Quadrate getheilt wird. Schon nach dem Augenmaße könnte man nun das, was von P in II, III, IV, VII . . . enthalten ist, ziemlich richtig in 2, 3, 4, 7 . . zeichnen. Um aber ganz genau zu verfahren, hat

man 2 Wege; 1. um z. B. den Punkt V auf ce zu bestimmen, messe man nach M KV, und nehme auch auf kv nach m eben so viele Ruthen oder Theile, als auf KV nach M gingen. Würde man eben so GT, CG nach M messen, und dieselben Längen nach m von c nach g und von g nach t tragen: so hätte man t u. s. w. 2. Nach Penther (s. dessen prakt. Geom. §. 676.) theile man Cf, cf, CD, cd in gleich viel Theile, und lege an ein Paar einander gegenüberstehende Punkte z. B. C, F ein Linial AC, längst dessen Schärfe sich Theile des Maßstabes M befinden. An dieses Linial lege man einen Schenkel von hölzernem rechtwinkligen Dreyecke W, dessen anderer Schenkel gleichfalls Theile von M enthält. Legt man nun an cf eben so ein nach m getheiltes Linial, an dieses w, und zählt an al und dem Schenkel von w eben so viele Theile, als man an AL und GT zählte; so ist der Punkt t für 8 bestimmt.

B. Man fasse den gefundenen neuen Maßstab m mit den Zirkelspitzen, und spanne ihn zwischen die Punkte 50, 100, 200... eines Proportionalzirkels, den man dann unverrückt stehen läßt. Nun kann man die Zahl, welche man für eine Seite der größeren Figur nach ihrem Maßstabe findet, gehörig von dem zur bestimmten Verjüngung gestellten Proportionalzirkel nehmen, und so die homologen Seiten in eben der Ordnung in den verjüngten Grundriß eintragen.

C. Zu demselben Zwecke diente sonst der Reduktionszirkel, oder Burgis *) Proportionalzirkel. Eine Hülse läßt sich an 2 eingetheilten an beyden Seiten mit Spitzen versehenen Stangen so verschieben, daß die oberen Enden jedes Verhältniß gegen die unteren bekommen.

*) Jobst Burgi (Justus Byrgius) war ein Helvetier, geb. 1552, gest. 1633. Er erfand noch vor Neper Logarithmen dem Dezimalsystem gemäß und zum arithmet. Gebr. Berechnete auch Sinustafeln von 2 zu 2 Sekunden (s. Kästners Gesch. d. Mathem. 2. Th. S. 375.).

men. Faßt man also mit diesen eine Seite und schraubt das Instrument fest; so geben die oberen eine verhältnißmäßige vergrösserte oder verkleinerte Weite oder Seite.

D. Noch fehlerhafter, als das vorige Instrument, ist der zum Verjüngen und Vergrößern gebrauchte Storchschnabel, wodurch man höchstens nur scheinbare Aehnlichkeit erhalten kann. Dieses Instrument (fig. 167. Tab. XV.) besteht aus 4 Linialen von gleicher Größe, das eine Paar um den Stift e, das andere um b beweglich. Auf eg = eh = ba = bc sind in gleichen Weiten Löcher gebohrt, um Stifte aufzunehmen, damit beyde Paare von Linialen so aneinander gehängt werden können, daß fc = fe = bd und fb = ed, mithin eb ein Rhombus wird. Dieser Figur kann man nun, weil auch bey d und f Stifte durch die übereinander liegenden Löcher gehen, immer andere und andere Winkel verschaffen, ohne daß sich die Seiten des Rhombus veränderten. Auch bleiben bey diesen verschiedenen Winkeln die △△ cfe, cba immer ähnlich; daher bleiben auch die Punkte c, e, a stets in einer geraden Linie, und ce stets in demselben Verhältniße zu ca, in welchem bd zu ba ist. Setzte man nun bey a einen stumpfen Stift, in e eine Bleyfeder ein, und führte den Stift in a, indeß sich das Instrument um den festen Punkt c herumdreht, an dem Umrisse einer Figur LMa herum; so würde die Bleyfeder auf einem unter e gelegten Papier die verkleinerte Figur lme beschrieben, ähnlich LMa. Denn kömmt bey der Herumführung des ganzen Instruments um c die gerade Linie cea in die Lage cmM: so bleibt immer cm : CM = ce : ca = bd : ba, oder alle Punkte, welche von a und e zugleich beschrieben werden, haben stets proportionelle Abstände von c; u. s. w.

E. Das Netz. Um nämlich das bey A nöthige Ziehen der Bleistiftlinien zu vermeiden, verfertigt man aus feinen Fäden oder Pferdehaaren ein Netz, indem man

 jene

jene in einem viereckigen Rahmen CE so ausspannt, daß CE in lauter Quadrate zerlegt wird.

Sechster Abschnitt.

Von der Ausmessung gegebener Figuren (Epipedometria).

---

§. 136. Lehrsatz. I. Wenn die Seite AB des Rechteckes AD (fig. 76. Tab. VI.) $n$mal und die Seite AC $r$mal so groß, als die Seite ab des Quadrats ad ist, und II. wenn die Seite BD des Quadrats AD (fig. 74.) $n$mal so groß ist als die Seite bd des kleineren Quadrats: so enthält jenes Rechteck das kleinere Quadrat nrmal, und dieses Quadrat dasselbe ad n^2mal was dieß auch für Zahlen seyn mögen.

Beweis von I. $AD : ad = AB \,.\, AC : ab^2$ (§. 132. Zus.) $= n.ab \,.\, r.ab : ab^2$ (p. hyp.) $= nr : 1$ (§. 94. B.), folglich $AD = nr.ad$.

Bew. v. II. Auf gleiche Art, wie vorhin, erhellt, daß $AD = n^2.ad$ ist.

§. 137. Erkl. Eine gegebene Figur ausmessen, oder ihren Flächeninhalt finden, heißt bestimmen, wievielmal das angenommene Maß (der Quadratfuß, die Quadratruthe ꝛc. (§. 154. Z.)) in ihr enthalten ist.

I. Geradlinige Figuren auszumessen.

1. Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie in die Höhe, oder einer

einer Seite in die andere, und der Flächeninhalt des Quadrats ist gleich dem Quadrate einer Seite, wie man sich kurz auszudrücken pflegt (Anm. 2. Z. S. 221.).

2. Der Flächenraum eines schiefwinkligen Parallelogrammes ist gleich dem Produkte aus seiner Grundlinie in die Höhe (§§. 70. 72.).

3. Daher ist der Flächenraum eines Dreyeckes gleich seiner Grundlinie multiplizirt durch die Höhe, und dieses Produkt dividirt durch 2 (§. 70. III.). (Wie kann man dasselbe noch mehr ausdrücken?).

Zusatz. Da man nach diesen Sätzen Gleichungen, deren jede 3 Größen enthält, bekömmt: so kann man, wenn 2 derselben gegeben werden, immer die dritte finden.

4. Der Flächenraum eines Trapez AD (fig. 78.) ist gleich dem Produkte aus der Hälfte der Summe seiner 2 Grundlinien AB, CD, in den Abstand CE dieser Grundlinien voneinander.

Beweis. Zieht man die Diagonale CB, so ist CE sowohl für △ CDB, als △ ABC, deren Grundlinien CD, AB sind, die Höhe; folglich

$$\triangle\ ACB = \frac{AB}{2}.\ CE$$

$$\triangle\ CDB = \frac{CD}{2}.\ CE$$

also $\triangle\ ACB + \triangle\ CDB = ABCD = \left(\frac{AB + CD}{2}\right) \times CE.$

Um

5. Um das Trapezoid HL (fig. 79.) und überhaupt jede geradlinige irreguläre Figur zu messen, muß man dieselbe durch Diagonale in Dreyecke theilen und jedes einzeln berechnen. Man hat hiezu in Praxi zwey Methoden:

Erste Methode. Man mißt mittels der Kette alle Seiten des Dreyeckes z. B. DEF (fig. 168.) und berechnet dann nach der Formel

$\triangle DEF = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c).(b+c-a).(a+c-b)(a+b-c)}$ — den Flächenraum $= A$.

Beweis der Gültigkeit dieser Formel. $A = \frac{ah}{2}$. Man suche nun h in den Seiten des Dreyeckes auszudrücken. Im rechtwinkligen $\triangle$ DEi ist Di $= \sqrt{(b^2 - h^2)}$ und im $\triangle$EiF ist iF $= \sqrt{(c^2 - h^2)}$. Nun ist iF $= a - Di = a - \sqrt{(b^2 - h^2)}$, und $iF^2 = a^2 - 2a \sqrt{(b^2 - h^2)} + b^2 - h^2 = c^2 - h^2$; folglich $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = \sqrt{(b^2 - h^2)}$ oder

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2 = b^2 - h^2;$$

daher $h^2 = \frac{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$

oder $h = \frac{1}{2a} \sqrt{(4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2)}$ (§. 45. B.).

Also $A = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} . \frac{1}{2a} \sqrt{}$ ꝛc.

Daher, wenn man $a^2 + b^2 - c^2$ wirklich zum Quadrat elevirt und reduzirt

A =

$A = \frac{1}{4} \cdot \surd (2a^2b^2 - a^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4).$

$= \frac{1}{4} \cdot \surd [(2b^2 - a^2) \cdot a^2 + (2c^2 - b^2) \cdot b^2 + (2a^2 - c^2) \cdot c^2]$

$= \frac{1}{4} \cdot \surd [(c^2 - (a - b)^2) X ((a + b)^2 - c^2)]$

Aber $c^2 - (a - b)^2 = c^2 - a^2 + 2ab - b^2$
$= (c + a - b) \cdot (c - a + b)$

und $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$

Also $A = \frac{1}{4} \surd$ ꝛc. wie oben.

Bezeichnet man die Summe der drey Seiten durch 2S: so geht obige Formel in folgende über:
$A = \frac{1}{4} \surd [2S \cdot 2(S - a) \cdot 2(S - b) \cdot 2(S - c)]$, folglich
$A = \surd [S \cdot (S - a) \cdot (S - b) \cdot (S - c)]$.

Beyspiel. Man habe für jede Seite die Zahl von Fußen oder Ruthen gefunden, welche jeder Seite beygeschrieben sind: so ist,

1) $\frac{45 + 39 + 42}{2} = 63$; ferner

$63 - 45 = 18$; $63 - 39 = 24$; $63 - 42 = 21$.
Nun ist $18 \cdot 24 \cdot 21 = 9072$ und $9072 \cdot 63 = 571536$; endlich $\surd\ 571536 = 756 = A$. — Diese Formel gestattet übrigens die leichte Anwendung der Logarithmen. Auch sieht man aus obigem Ausdrucke für h, daß man aus 3 gegebenen Seiten des △ dessen Höhe finden könne.

Zweyte Methode. Von dem Scheitel eines jeden Winkels der gegebenen Figur fällt man Lothe auf die gegenüberstehende Seite, die man als Grundlinie annimmt,

wo-

wodurch man die ganze Figur in Dreyecke oder Trapeze theilt, die man nach obigen Grundsätzen berechnet.

6. Der Flächenraum eines regulären Polygons ist gleich der Hälfte seines Perimeter multiplizirt durch die senkrechte Linie, die man auf eine seiner Seiten von ihrem Mittelpunkte zieht (§. 103.).

Geodäsie.

Bemerkungen über die erste Methode.

1. Kann man eine Seite des Dreyeckes nicht messen: so verfährt man z. B. wie bey fig. 32.

2. Kann man in die Figur ABCDE (fig 169.) nicht hinein, so erhält man die Diagonale AC durch Verlängerung der Seiten AB, BC, welchen die Verlängerungen gleich gemacht werden, wo dann ac = AC; eben so erhält man die Diagonale AD; oder man verfährt nach §. 118. G. I.

II. Anwendung der zweyten Methode.

1. Den Flächenraum des Trapezoids ABCD (fig. 170.) zu finden. — Man setze Stäbe in C und D, und messe den Abstand des Punktes A von E, wo man das Loth EC errichten muß, welches man ebenfalls mißt. (Indem man sich diese Figur nur nach dem Augenmaße entworfen hat: schreibe man diese gefundnen Zahlen den Seiten der Figur auf dem Papiere bey; so jedesmal die folgenden Zahlen.) Man messe nun auch von E nach F, wo das zweyte Loth FD, das man ebenfalls mißt, errichtet werden muß. Indem man wieder nach F zurückekömmt, messe man noch das Stückchen FB. Sind nun die Zahlen so gefunden, wie sie der Figur beygeschrieben sind; so ist folgendes die Berechnung:

Flä-

Flächeninhalt			
des △	AEC =	8,3 X 2,5	= 20,75
—	BFD =	6,15 X 3,1	= 19,065
von	CDFE =	(8,3 + 12,3) X 19,6.	= 403,76
folglich	CDBA	. . . .	= 443,575

Die Richtigkeit dieses Calculs setzt besonders die Richtigkeit der Messung der Stücke von der Grundlinie AB voraus. Um sich dieser Richtigkeit zu versichern, thut man wohl, wenn man die ganze Grundseite auf einmal mißt, und dann die gemessenen Stücke hiemit vergleicht.

Nimmt man CD als Grundlinie; so verlängert man sie auf beyden Seiten, und fällt die Lothe AH, BG. Dann müssen die △△ AHC, BDG von berechnetem Flächenraum AG abgezogen werden.

2. Den Flächenraum einer irregulären Figur ACDEF... (fig. 171.) zu finden. — Man umgehe wieder die Figur, stelle in allen Ecken derselben Stäbe auf, und verzeichne sich dieselbe beyläuffig auf dem Papiere, um jeder gemessenen Seite oder Linie die Zahlen beyschreiben zu können.

Man stecke die gerade Linie AB ab, welche als Grundlinie der ganzen Operation dient, und errichte auf diese soviel senkrechte Linien, als die Figur Ecken hat. Man messe nun den Abstand Aa und das Loth aN; eben so ac und cM u. s. w. Eben so messe man dann die Lothe zur Linken, samt den Abständen Ab, indem man von B nach A zurückegeht. Addirt man nun die Zahlen für diese Abstände, so muß die Summe der erstern, wo man von A nach B maß, gleich seyn der Summe der letztern, indem man von B nach A gieng; denn alle diese Abstände zusammen sind = AB. Auf diese Art überzeugt man sich von der Richtigkeit der gemessenen Basis. Findet sich in beyden Summen ein kleiner Unterschied: so kann man das Mittel nehmen. Nun ist man im Stande auf der Stelle den Flächenraum zu berechnen, nämlich:

1)

1)	15.2	. . . . . .	= 30
2)	(15+20). 8,15	. .	=285,25
3)	(20+12,5).4	. . .	=130
4)	(12,5+21,9).5	. .	=172
5)	(21,9+6).9,25	. .	=258,075
6)	3.3		= 9
7)	. . . .		= 12
8)	(9,14+12).10,1	. .	=213,514
9)	(7+9,14).2,6	. . .	= 41,964
10)	(9,2+7).2,5	. . .	= 40,5
11)	(9,2+6).4	. . . .	= 60,8
12)	(6+6,3).8,2	. . .	=100,86
13)	6,3 X 1,5	. . . . .	= 9,45
also Flächenr. v. ACDE...		. .	=1363,413

Wollte man genau eine ähnliche Figur acde ... entwerfen, oder ACDE ... in Grund legen: so würde man der Linie ab soviel Theile von verjüngtem Maßstabe geben, als AB Ruthen oder Fuße hat; eben so verführe man mit den einzelnen Abständen Aa, Ab ... und den Lothen.

3) Den Flächenraum einer Figur ABCDE.. (fig. 172.), in welche man nicht gehen kann, z. B. eines Waldes, Weihers, zu finden. Man suche durch Errichtung von senkrechten Linien soviel Rechtecke zu bekommen, als möglich ist. Indem man die Figur durch Verlängerung ihrer Seiten begrenzt, erhält man gleichsam vier Grundlinien; sind diese aufeinander senkrecht: so hat man ein Rechteck; sind nur Ac, ab auf cb senkrecht: so hat man doch ein Trapez; jenes, wie dieses kann man leicht berechnen. Zieht man von diesem Flächenraume den gefundenen Flächenraum der einzel-

zelnen Figuren, wie Igd, Hde . . . von dem vorigen ab: so hat man den gesuchten Flächenraum = 1545,34.

4. Eine geneigte Ebene auf ihren horizontalen Flächenraum zu reduziren.*) — Es sey ACDB (fig. 173.) ein ziemlich beträchtlicher Abhang. Man lege genau am höchsten Punkte B der Linie AB, welche man als Grundlinie angenommen, und auf welche man die Perpendikel CF, DE errichtet hat, ein Linial GH (fig. 8.) von 6 — 10 Schuh Länge, richte dasselbe mittels der Setzwage ACB genau horizontal, in der Richtung gegen A, und bemerke den Punkt, wo das Senkbley P auf dem Boden auftrift. Man bringe dann den Endpunkt G des Linials genau an den Punkt 1, und verfahre, wie vorhin; so hat man die zweyte Länge u. s. w. Diese Längenanzahl bemerkt man jedesmal auf dem Papier. Gerade so mißt man auch die Linien ED, EF, FC, FA, mittels welcher man, wie gezeigt worden, den horizontalen Flächenraum der Figur findet.

II. Von der Ausmessung des Kreises.**)

§. 138. Aufgabe. Aus der Sehne ag (fig. 121. Tab. IX.) und dem Halbmesser CM die Sehne des halben Bogen aM zu finden.

Auflösung. In rechtwinkligem Δ aCi ist Ci $= \sqrt{(aC^2 - ai^2)}$, wo ai $= \frac{1}{2}$ ab bekannt; folglich weiß man auch iM $=$ CM $-$ iC. Nun ist, wie vorhin aM $= \sqrt{(ai^2 + iM^2)}$, also kann man aM finden.

Zusatz. Wäre daher aMb der 6te Theil der Peripherie, und man setzte den Halbmesser aC (= der Sehne dieses Bogens) = 1 Fuß: so fände man in Theilen die-

*) Vergl. §. 69. Geod. Anm.

**) Der Deutlichkeit wegen stelle ich alle hierüber vorkommenden Aufgaben hier zusammen.

dieses Halbmessers die Sehne für den 12, 24, 48 . . . und 768sten Theil der Peripherie (§. 93. Zus. 1.), welche letztere = 0, 0081811 . . . Fuß gefunden wird.

§. 139. Aufgabe. **Aus dem Halbmesser CM und dem gegebenen Perimeter des im Kreis beschriebenen regulären Polygons agfd . . . den Perimeter des um ihn beschriebenen regulären Polygons ABED . . . zu finden.**

Auflösung. In rechtwinkligem △ aCi ist Ci = $\sqrt{(aC^2 - ai^2)}$ zu diesem Abstande der Sehne ag vom Mittelpunkte C, dem Halbmesser CM und dem gegebenen Perimeter agfd . . . suche man die vierte Proportionallinie, welche der verlangte Perimeter ist.

Beweis. Der Perimeter agfd . . .: Perimeter des umschriebenen Polygons = ag : AB (§. 109. Zus. 1. und §. 121.). Aber Ci : CM = ag : AB (§. 123.), folglich auch Ci : CM = agfd . . : ABED . .

§. 140. Aufgabe. **Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser zu bestimmen.**

Auflösung. Die Zahl 0,0081811 (§. 138. Zus.) durch 768 multiplizirt, giebt den Perimeter des regulären 768 Ecks in Theilen des Halbmessers (= 1'). Dieser Perimeter ist = 6,2830848 . . Fuß. Nach §. 139. findet man hieraus in denselben Theilen den Perimeter des umschriebenen regulären 768 Ecks = 6,2831375 . . Fuß. Also ist die Peripherie > 6,2830 und < 6,2831 . . Fuß, also beynahe um 6,2830 länger als der Halbmesser, folglich beynahe 3,1415mal so lang als der Durchmesser.

messer. Daher ist das für jeden Kreis gültige Verhältniß (§. 121. Zus. 3.) des Durchmessers zur Peripherie 1 : 3,1415, oder 100:314, oder genauer 1000:3141 u. s. w.

Anmerkung 1.

Auf einem von dieser Methode nicht sehr verschiedenen, äusserst beschwerlichen Wege bemühten sich Fr. Vieta, Adr. Romanus und endlich Ludolph von Cöln diese Zahl für die Peripherie, den Durchmesser = 1 gesetzt, zu finden. Vieta, geb. zu Fontenai in Poitou ums J. 1540 und gest. 1603. zu Paris, machte seine Methode der Näherung zum Kreise durch eingeschriebene Vielecke in seinen Variorum de Reb. Mathem. responsorum lib. VIII. cap. 18. bekannt. — Von Adrian R. sagt Vossius: „Adr. Romanus Louaniensis (v. Löwen), eques auratus ac medicus Caesareus jam claruit 1594, anno autem 1610 in nova Zamoscii urbe mathesin profiteri cepit .... moritur Moguntiae 1616." Er hielt sich mehrere Jahre zu Würzburg auf, wo er 1595 Supputationem ecclesiasticam secundum novam veteremque Calendarii rationem, und im Jahr 1603 quatuor instrumenta arithmetica nova methodo herausgab. Von Würzburg reißte Roman nach Frankreich, um Fr. Vieta (damals Sekretair der Königinn Margherita) kennen zu lernen, welcher sein Problema mathematicum omnibus totius orbis mathematicis ad construendum propositum (probl. Apollonii (Pergaei) de tactionibus — einen Kreis zu finden, welcher 3 gegebene berührt —) so geschickt aufgelöst hatte. — Ludolph v. Cöln (erster Prof. der Kriegsbaukunst zu Leiden) giebt in seinem Buche: Van den Cirkel.... door Ludolph van Keulen gheboren in Hildesheim Tot Delft 1596. Fol., — jene Zahl für die Peripherie nur

nur bis auf 20, und in seinem Buche: de Arithmetische en geometrische fondamenten van M. Ludolph van Ceulen Leid. 1616. Fol. — bis auf 32 Dezimalstellen an. Im 14ten Cap. jenes ersten Buches finden sich die Seiten der Vielecke vom △ bis auf das 80 Eck, für den Halbmesser 1 mit 14 Nullen; auch berichtet L., zu diesen Untersuchungen habe ihn Adriaen von Romen, Dokter und Professor (der Arzneykunst), der Zeit zu Würzburg in Franken veranlaßt. Indessen soll L. jene Zahl bis auf 35 Dezim. wirklich gefunden haben. — Scharp, ein englischer Geometer, soll nach Montucla (S. 159.) die Peripherie bis auf 74 Ziffern gefunden, und den Gang seiner Arbeit in seinen mathematischen Tafeln mitgetheilt haben; diese möchten wohl diejenigen seyn, welche in dem Buche: Geometry improv'd 1) by a large and accurate table of segmentes of Circles 2) a concise Treatise of Polyedra — by A Scharp Philomath. London 1718. enthalten sind. Auch in der Einleitung zu Sherwin's Mathematical Tables — London 1771. (worin sich Scharp's erste logarithmische Tafel findet) S. 100 wird Montucla's Angabe bestättigt. — In eben dieser Einleitung S. 111. wird berichtet, daß Machin jene Zahl bis auf 100 Dezim. erweitert habe, und daß diese in Iones Synopsis Palmariorum Matheseos bekannt gemacht worden sey. — Lagny (Prof. der Hydrographie zu Rochefort, dann königl. Unterbiblioth. geb. zu Lyon 1660 gest. 1734.) berechnete dieselbe Zahl in seinem Memoire sur la Quadrature du Cercle et sur la mesure de tout arc, tout secteur, et tout segments donné par M. de Lagny, welches Mem. sich in den Memoir. de l'acad. des Sc. vom Jahr 1719 findet, bis auf 127 Dezimalstellen, deren letztere er so angiebt: 8446 + und 8447 —. — Ein Ungenannter (nach einem Manuscript in der Bodleiischen Bibl. zu Oxford) giebt dieselbe mit 156 Dez. und bemerkt zugleich daß die unten

unten folgende mit einem Strich bezeichnete Ziffer 8 bey Lagny unrichtig 7 ist. Diese ganze Zahl ist folgende:

Vieta * A. Rom. *
3,14159 26535 89793 23846 26433
Ludolph *
83279 50288 41971 69399 37510
Scharp. *
58209 74944 59230 78164 06286
Machin *
20899 86280 34825 34211 70679 82148
, Lagny *
08651 32823 06647 09384 46460 95505
82231 72535 94081 28480 2.

Anmerkung 2.

Von diesen Dezimalziffern nimmt man soviele zur ganzen Zahl 3, als in bestimmten Umständen die Genauigkeit des Calculs es erfordert. Zum Beweis, welche Schärfe schon Vieta's Zahl giebt, diene folgendes: man soll mittels dieser Zahl die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser = 7 Millionen Toisen (= 42 Mill. Fuß), finden. Nun ist Vieta's letzte Dezimalziffer 5 zu klein, 6 aber zu groß. Multiplizirt man nun vermöge §. 141. 42000000 mit $\frac{1}{10000000000}$, und dann auch mit $\frac{6}{10^{10}}$; so erhält man im ersten Falle 0,0210 und im andern 0,0252, d. i. der Umfang jenes Kreises, welcher vermöge §. 141. mehr als 126 Mill. Fuß beträgt, findet sich schon nach Vietas Zahl zwischen 21 und 25 Tausendtheilchen eines Fußes eingeschränkt. Nun sind bey so vielen Millionen Fußen für den ganzen Umfang 1000 Theile des Fußes unbeträchtlich, also giebt allein schon jene gebrauchte Zahl eine große Schärfe im Calcul, daher würde dieser, da der angenommene Durchmesser viel größer ist, als der der Erde, schon den Umfang der Erde ge-

genauer bestimmen, als man verlangen dürfte. Eben hieraus kann man auf die Genauigkeit schließen, welche eine der andern Zahlen für den Kreisumfang geben würde. So erhellt denn schon hieraus deutlich, wie unnütze es wäre, sich in unsern Tagen mit der Quadratur des Kreises, wenn ihre Auffindung auch möglich wäre, zu beschäftigen (vergl. die Anm. zu §. 145.).

Archimedes gab das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie in den ganzen Zahlen 7 : 22, welches schon bey der 3ten Dez. zu hoch wird. Adrianus Metius aber in seinem Buche: Arithm. lib. duo et Geom. lib. VI. Lugd. Bat. 1646. drückt es in den Zahlen 113 : 355 aus, so, daß es erst bey der 7ten Dez. zu hoch wird. Er selbst meldet Geom. P. II. c. 4. p. 179. sein Vater, confoederat. Belg. Prov. Geometra insignis, habe Archimedeis demonstrationibus gefunden, proportionem peripheriae cujusvis circuli ad suam diametrum esse $3\frac{16}{113}$, h. e. $\frac{355}{113}$, quae quidem minoribus constat terminis, quam ea, quam posuit, Mr. Ludolphus, a qua tamen distat minori differentia, quam $\frac{1}{3000000}$. Gewöhnlich bedient man sich indessen des Verhältnisses 1 : 3, 14 oder 100 : 314.

§. 141. **Aufgabe.** Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises die Länge der Peripherie zu finden und umgekehrt.

Auflösung. Man setze in den Proportionen 1 : 3, 14 . . = d : x und 3, 14 : 1 = p : x statt d den im Längenmaße gegebenen Durchmesser, und statt p die im Längenmaße gegebene Peripherie, und suche x: so hat man in demselben Maße aus der ersten Proportion die zu d gehörige Kreislinie, und aus der zweyten den zu p gehörigen Durchmesser.

Zusatz.

Zusatz. Bezeichnet man die Ludolph'sche Zahl 3, 14.. durch π, die Kreislinie durch p, den Durchmesser mit d oder 2r: so ist immer $p = d\pi = 2r\pi$, und $d = \frac{p}{\pi}$; oder $r = \frac{1}{2} p. \frac{1}{\pi}$. Nun hat Lambert (in der 24ten Tafel in dessen Zusätzen) $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309886183$ . . . berechnet, daher ist immer $d = p. 0{,}31831$ und $r = p. 0{,}15915$ beynahe, welche für immer berechnete Zahlen den Calcul erleichtern.

§. 142. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser d eines Kreises und der Anzahl der Grade n eines Bogens die Länge l dieses Bogens, und umgekehrt n aus d und l zu finden.

Auflösung. Man suche die Länge L der Peripherie nach §. 141. und x aus der Proportion $360° : n° = L : x$: so hat man l, und aus der Proportion $L : l = 360° : x°$ die der Länge des gegebenen Bogens entsprechende Anzahl von Graden.

Zusatz. Aus der ersten Proportion und nach §. 141 Zus. erhellt, daß $\frac{n°}{180}.r.\pi$ und $\frac{n'}{180{,}60} . r\,\pi$, eben so $\frac{n''}{180.60^2}. r\pi$ die Formeln zur Berechnung sind, wieviel ein Kreisbogen, in Graden, Minuten oder Sekunden gegeben, für jeden Halbmesser r, in einem bekannten Längenmaße ausgedrückt, in eben diesem Maße giebt.

Aus diesen Formeln folgen die für die umgekehrte Berechnungsart.

§. 143. Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser d den Flächeninhalt a des Kreises zu finden.

Auflösung. Man multiplizire die nach §. 141. gefundene Länge der Kreislinie mit dem 4ten Theile des Durchmessers oder dem halben Radius (§. 103. Zus. 1. mit §. 127. n. 3.); oder r/2 $a = \frac{r}{2} . 2 r\pi = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$.

Zusatz 1. Für d substituirt $\frac{p}{\pi}$ (§. 141. Zus.): so ist $a = \frac{p^2}{\pi^2} . \frac{1}{4} \pi = p^2 . \frac{1}{4\pi} = p^2 . 0{,}318309 \ldots : 4$ $= p^2 . 0{,}0795774715459 47 \ldots$

Hat z. B. ein kreisrundes Bassin 100 Fuß im Umfange: so ist sein Durchmesser = 31,83098 ... und seine Fläche = 795 Q. Fuß beynahe. Oder ein kreisförmiges Amphitheater hat 2000′ im Durchmesser, wieviel Raum hält es? $a = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{2000^2}{4} . 3{,}141592 =$ $1000000 . 3{,}14 \ldots = 3141592$ Q. Fuß. Oder der Kastanienbaum dei cento cavalli auf dem Aetna soll 120′ im Umkreise haben: so ist seine Durchschnittsfläche $= 120^2 . 0{,}0796 = 1146\frac{1}{4}$ Q. Fuß.

Zusatz 2. Es verhält sich also die Kreisfläche zum Quadrat des Durchmessers, wie 785 : 1000. Denn $d = 1'$: so ist π beynahe $= 3{,}1415'$, folglich $a =$ $3{,}1415 . \frac{d}{4} = 0{,}785 \ldots$ Q. Fuß. Daher $a : d^2 =$ $0{,}785 : 1$, oder $= 785 : 1000$ beynahe.

Zusatz 3. Ist also a gegeben, so findet man aus $785 : 1000 = a : d^2$ das Quadrat des Durchmessers, und

und daraus diesen selbst; oder $d = 2\sqrt{a.\frac{1}{\pi}} = 2\sqrt{a}.\sqrt{0,318\ldots} = 2\sqrt{a}.0,564 = 1,128.\sqrt{a}$, und $r = 0,564.\sqrt{a}$. Will man eben so aus dem gegebenen Flächenraume des Kreises seine Peripherie bestimmen; so gilt die Formel $p = d\pi = 2\pi\sqrt{a.\frac{1}{\pi}} = 2\sqrt{a.\frac{\pi^2}{\pi}} = 2\sqrt{a}.\sqrt{\pi} = 2\sqrt{a}.1,772453\ldots = 3,544906.\sqrt{a}$. Z. B. bey einer Wasserleitung soll jede Röhre einen Wasserstral von 1,5 Q. Fuß schütten, wie groß muß der Durchmesser seyn? $\sqrt{a} = \sqrt{1,5} = 1,22\ldots$; daher $d = 1,376\ldots$ Fuß.

Zusatz 4. Man kann daher jede geradlinige Figur in einen Kreis verwandeln, wenn man $r = 0,564.\sqrt{a}$ macht.

§. 144. **Aufgabe. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises und der Zahl der Grade eines Bogens den entsprechenden Ausschnitt s und Abschnitt σ zu finden.**

Auflösung. Man suche des gegebenen Bogens Länge (§. 142.), diese mit $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$ multiplizirt, hat man s im Quadratmaße (§. 103. Zus. 1. mit §. 127. n. 3.). Mißt man ferner das auf der Sehne jenes Bogens stehende Dreyeck und zieht diese von s ab: so erhält man σ.

Geodäsie.

Muß man erst die Data suchen, z. B. man sollte 1) den Kreisausschnitt BAD (fig. 174.) auf dem Felde finden: so muß einer der Radien AB, AD gemessen werden, welcher doppelt genommen den Durchmesser giebt,

woraus man die Kreisfläche berechnet. Mißt man nun auch z. B. mittels des Astrolabiums den Winkel A; so ist dadurch der Bogen gegeben. Sind die Zahlen gefunden, wie in der Figur; so hat man durch die Proportion — 360° : 100° = a (d. i. die ganze Kreisfläche) : Kreisausschnitt — den letztern. — Um 2) den Kreisabschnitt ABC (fig. 175.) zu finden, muß man erst das Centrum D nach §. 85. Aufl. v. II. suchen; dann durch das Ziehen der Radien DA, DB den Kreisausschnitt bilden, diesen wie vorhin, berechnen, und davon den Flächenraum des Dreyeckes ABD abziehen. 3) Sollte man z. B. den Flächenraum eines kreisrunden Bassin finden (fig. 176. Tab. XVI.): so fände man den Durchmesser AC entweder nach §. 85. Aufl. v. I. oder mit Hilfe des Kreutzmaßes, das man z. B. in B setzt, und dann BA, BC, welche von den Sehelinien angegeben werden, verlängert; wo jene geraden Linien die Kreislinie schneiden, sind die äussersten Punkte des gesuchten Durchmessers (§. 87. Zus. 2.). Wäre aber das Bassin mit Wasser gefüllt: so bestimmte man 1) dadurch den Durchmesser, daß man vorerst die Endpunkte desselben, und zwar A durch das Ziehen der Tangente S T fände; denkt man sich nun die im Punkte A senkrecht errichtete Linie AD gegen C verlängert; so wäre C dieser Endpunkt, den man folglich durch Visiren finden kann. Zieht man ferner von D die Tangente DE, die man, wie AD, mißt: so findet man CD nach §. 126. III., daher auch AC. Ist z. B. AD = 4, DE = 8: so ist AC = 12.

§. 145. Hypothesis. So lange es nur auf Verhältniße ankömmt; so nimmt man $1 : \pi$ = Durchm. : Periph. bey jedem andern Kreise. Stellt man aber die Theile der Peripherie, als eine Menge von Graden, Min., Sek. im Längenmaße dar; so nimmt man den Halbmesser zur Einheit an, und sagt dann: 180° sind

3,141... Halbmesser lang; 360° = 6,283 = 6,283...; $\frac{1}{2}\pi = 90° = 1,570796$; $\frac{1}{4}\pi = 45° = 0,785398$... u. s. w. Worauf sich denn die von Lambert bis auf 27 Dezimalstellen (in der 23ten Tafel seiner Zusätze) berechneten Grade, Min., Sek. beziehen.

Zusatz 1. Mittels dieser von Lambert verfertigten Tafeln kann man die in §. 142. Zus. angedeuteten Aufgaben leicht lösen. Es seyn z. B. 49° 27′ 8″ im Längenmaße des Halbmessers = 1′ auszudrücken; so hat man nach den Tafeln

$$
\begin{array}{r}
49° = 0,855211 \\
20' = \ldots 5817 \\
7' = \ldots 2036 \\
8'' = \ldots\ldots 38 \\
\hline
49°27'8'' = 0,863102.
\end{array}
$$

Wäre daher des Kreises Halbmesser = 25′; so ist dieser Bogen für einen solchen Kreis 21,57755 Fuß.

Zusatz 2. Daher ist auch leicht der Inhalt des Ausschnittes zu berechnen. Denn dieser ist $= \frac{n°}{360°} r^2 \pi$ (§. 143) $= \frac{n}{180} r\pi . \frac{1}{2} r$; wo $\frac{n}{180} r\pi$, nach den Tafeln, wie vorhin berechnet, der im Längenmaße dem Halbmesser r gemäß ausgedrükte Bogen ist, welcher als Grundlinie eines dem Ausschnitte gleichen Dreyeckes noch mit $\frac{1}{2}$ r, der Höhe, multiplizirt wird.

Zusatz 3. Eben so kann man umgekehrt einen jeden in Theilen des Halbmessers gegebenen Bogen b in Sekunden finden, wenn man ihn mit 206264 (genauer 206264,8) multiplizirt. Denn nach der Formel (§. 142. Zus.)

Zus.) ist 3,141529 . . : b = 180. 60^2 : n″, r = 1′ gesetzt, und $\frac{648000}{3,14\ldots} = 206264$.

Anmerkung.

Das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie durch rationale Zahlen genau auszudrücken, wodurch man im Stande wäre, den Kreis eben so, wie jedes Dreyeck, in ein völlig gleiches Quadrat zu verwandeln (§. 131. Zus.), waren viele Mathematiker umsonst bemüht. Die Geschichte hat uns einen der ältesten Versuche, den Kreis zu quadriren, aufbewahrt, den des Hippokrates des Chiers (non Coi medici) vor mehr als 400 J. vor C. G. Seine Erfindung ist unter dem Namen „Lunula Hippocratis„ bekannt. Wir stellen sie kurz dar:

Aus dem Mittelpunkte C des Kreises (fig. 177.) ziehe man CD lothrecht auf AB, und AD, BD: so ist $BD^2 = CD^2 + CB^2 = 2CB^2$, d. i. das Quadrat der Hypotenusa BD ist gleich dem doppelten Quadrate des Halbmessers des Halbkreises AEB oder ADB. Zieht man daher mit BD den Bogen AfB: so ist AfBDA ein Quadrant eines noch einmal so großen Kreises, als AEBDA (§. 135. Zus. 1.); folglich ist er gleich dem Halbkreise ABEA. Zieht man nun von beyden das gemeinschaftliche Segment ABfA ab; so sind die Reste AEBfA, ABD gleich, d. i. das Möndchen zwischen AEB und AfB ist gleich dem gleichschenkligen Dreyecke ABD. Aber dieses Dreyecks Flächenraum ist = AB. $\frac{1}{2}$ CD = 2 CB. $\frac{1}{2}$ CB = CB^2, also ist auch jenes Möndchen genau gleich dem Quadrate des Halbmessers dieses Kreises.

Man hätte also eine partielle Quadratur, wodurch man aber für die Quadratur des ganzen Kreises oder Halbkreises, als aliquoten Theil, nichts gewonnen hat, in-

indem man den Flächeninhalt des Segments ABfA nicht finden kann, ohne den zum Quadranten AfBD gehörigen ganzen Ausschnitt gemessen zu haben (§. 144.). Daher führt Aristoteles die Quadratur dieses Möndchens an mehreren Orten als ein Beyspiel von einem Trugschlusse (eines wahren und falschen Beweises) auf.

Zusätze zur Geodäsie.

A. Das Theilen der Figuren.

I. Ein △ ABC (fig. 178.) in 2 gleiche Theile zu theilen mittels einer auf AC senkrecht errichteten Linie DE. — Man suche zwischen AC und der Hälfte des Segments cC die mittlere Proportionallinie CD (§. 125. Zus.) *), ziehe das Loth DE: so ist das gegebene △ halbirt. Denn

$$Bc : DE = cC : CD$$
$$AC : CD = CD : Cf$$

also $\frac{Bc\,.\,AC}{2} : \frac{DE\,.\,CD}{2} = cC : Cf = 2 : 1$, d. i.

△ ABC = 2 △ CDE.

Wollte man das △ ABC (fig. 179.) z. B. in 3 gleiche Theile durch Perpendikel theilen: so theilte man nun cC in 3 gleiche Theile, zöge auf AC senkrecht aus den Theilungspunkten g, f, die Linie ge, fd, und trüge die Sehnen Cd, Ce von C nach D und D': so werden dann die in diesen Punkten errichteten Lothe das △, wie verlangt worden, theilen.

II. Das Viereck ABDC (fig. 180. 1te) zu halbiren mittels einer zu BD parallel gezogenen Linie. — Man verlängere BA, DC, bis sie in e zusammenstoßen; verwandele das Viereck in ein glei-

*) Wie kann man blos aus §. 124. Zus. 1., nach §. 130. ausgedrückt, und dem Pythagor. Lehrs., beweisen, daß CD' die gesuchte mittlere Proportionallinie sey?

gleiches △ BDf, halbire Bf in g, suche eine mittlere Proport. ei zwischen eg, Be; so halbirt il || BD das Viereck. (Den Punkt l selbst kann man dadurch bestimmen, daß man go || BD zieht, und el als mittlere Proport. zwischen eo und De sucht.). — Denn

$$\begin{array}{l} BD : il = Be : ie \\ eg : ei = ei : Be \\ \hline \end{array}$$

also BD . eg = il . ei, d. i. das Rechteck gm = dem Rechteck in; folglich 2(x + b + a) = b + a + c + d, oder 2x + b + a = c + d. Aber auch r + d + c = Bl + x + b + a = BDf + a, also 2x + b + r = Bl + x + r, oder x + b = Bl.

Sollte 2. die Theilungslinie der Seite AC (fig. 180. 2te) parallel gezogen werden: so zöge man go || AC, suchte die mittlere Proport. el zwischen eo, DE und zöge dann die gesuchte lm. (Der Punkt m selbst kann bestimmt werden, wenn man zu fe, Ae und der mittleren Proportionallinie zwischen eg, fe die 4te Proportionallinie em sucht.)

III. Das Viereck ABCD (fig. 181.) durch Linien, parallel z. B. der Seite AD, in 3 gleiche Theile zu theilen. — Man ziehe DB, dieser parallel Ce, und mache Af = $\frac{1}{3}$ Ae. Man verlängere dann DC nach R und suche zwischen AR, fR die mittlere Proport., die man von R nach h trägt; ziehe dann hi = AD und theile den Rest BCih, wie unter II.

B. Einem Plane oder Grundrisse eine Windrose beyzufügen.

Vorbereitung. 1. Die Mittagslinie für einen gewissen Ort zu finden. — Unter mehreren Methoden, dieß zu thun, wird man folgende auf dem Felde leicht anwendbar finden: auf einer ebenen und horizontalen Platte (fig. 182. 1te) beschreibe man mehrere konzentrische Kreise, in deren Mittelpunkte man senkrecht einen

einen Stift Cf von 6 bis 10 Zoll errichtet, dessen oberer Endpunkt ein kleines Knöpfchen seyn kann, um die Grenze des Schattens genauer unterscheiden zu können. Man beobachte nun zwischen 9 und 11 Uhr des Morgens, welchen Punkt A der Kreislinie HD das Ende des Schattens berührt, und Nachmittags, zwischen 1 und 3, in welchem Punkte B das Ende des Schattens abermals dieselbe Kreislinie HD schneidet. Dieselben Beobachtungen kann man auch in Ansehung mehrerer Kreislinien machen, um das Resultat genauer zu bestimmen. Theilt man nämlich nun den Bogen AB in zwey gleiche Theile, und zieht durch diesen Theilungspunkt und dem Centrum eine gerade Linie CD auf der Platte: so ist dieß die gesuchte Mittagslinie. Dieselbe Linie muß man durch Halbirung der Bogen ab, αβ erhalten. — Da die Sonne, während der Zeit, als diese Beobachtungen angestellt worden, ihren Stand nicht, oder doch nicht merklich, verändern darf: so muß man hiezu die Zeit der Sonnenstillstände oder die ihr nahen Täge wählen. Zu einer andern Zeit müßte man sich sonst der Correktionstabellen bedienen.

Die Schwierigkeit, das Ende des Schattens genau zu bestimmen, vermeidet man durch die Anwendung des auf Taf. XVIII. fig. 201. verzeichneten, sehr nützlichen Instrumentes. Dieses besteht aus der dünnen Platte P mit einer kleinen Oeffnung T, wodurch ein Sonnenstral fallen kann. Diese etwa 3″ große und an dem vertikalstehenden Fußgestelle AB von 7 — 8″ befestigte Platte wird auf eine genau horizontale Platte DB gesetzt. Durch T läßt man einen Faden TC mit einer Bleykugel, die unten eine scharfe Spitze hat, auf BD fallen und bemerkt den Punkt C, in den sie fällt. Aus diesem Punkte beschreibt man konzentrische Kreise. Läßt man nun durch das Loch T einen Sonnenstral, (welcher lebhafter auf der horizontalen Fläche erscheint, wenn man die Platte P mit einem großen Tuche, oder Pappe behängt,) und be-

bemerkt Vor- und Nachmittags die Punkte F, E, in welchen der Stral in die Peripherie jedes Kreises kömmt: so ist die alle diese erhaltenen Bogen halbirende Linie CH die gesuchte Mittagslinie.

Dieses so leicht an jeden Ort hin, wo man eine Mittagslinie zu ziehen wünscht, transportable Instrument hat, wie man leicht sieht, auch den Nutzen, daß es statt einer Setzwage dienen kann.

2. Die Abweichung der Magnetnadel für einen gewissen Ort zu bestimmen. Der eine Pol der Magnetnadel ist nicht immer genau gegen den Nordpunkt gerichtet, sondern weicht, nach Ort und Zeit verschieden, etwas gegen Westen oder gegen Osten ab. Für Europa ist diese Abweichung größtentheils westlich. Will man nun diese Abweichung für denselben Ort, für welchen man nach 1. die Mittagslinie gefunden hat, bestimmen; so setzt man auf letztere einen gewöhnlichen Compaß oder die Boussole so, daß der Stift, auf dem die Nadel ruht, auf der Mittagslinie steht, und die Linie, welche durch den Anfang der Theilung des Compasses geht, mit der Richtung der Mittagslinie zusammenfällt. Der Grad, auf welchen dann die Nadel spielt, zeigt die Abweichung der Magnetnadel.

3. Es seyn A, B fig. 182. 2te 2 Gegenstände, zu einem Stücke Landes oder einer Markung gehörig, welche man in Grund gelegt hat, so, daß man folglich die Lage jener Gegenstände kennt. Man stelle nun das Instrument fig. 26. Tab. II. bey A ein, und visire nach B. Ist die Magnetnadel ab ruhig geworden: so bemerke man die Größe des Winkels nAB, welchen der Nordpol der Nadel mit der Sehlinie AB bildet. Gesetzt, dieser Winkel werde $= 70°$, und die Abweichung der Nadel nach Westen sey nach 2) $= 20°$ gefunden, so zeigt ns nicht nach den wahren Nordpunkt, sondern, da die Richtung der Sehlinie gegen Osten ist: so hat man $70° - 20° = 50°$ für den Winkel, welcher AB mit dem wahren Norden macht.

Wäre

Wäre die Abweichung östlich gewesen, oder hätte die Sehlinie, wie AC eine westliche Richtung: so hätte man 20° zum gefundenen Winkel addiren müssen.

4. Vom Plane derselben Markung sey nun AB eine Seite, der man sich bey seinen Operationen auf dem Felde z. B. als Grundlinie bediente. Man verlängere dieselbe willkührlich und mache den Winkel n′A′B′ = nAB, wie man ihn berichtigt unter 3) gefunden hat. Zieht man nun an der Stelle, wo man für diesen Plan die Windrose oder die 4 Hauptpunkte derselben hinzeichnen will, eine mit n′A′ parallele (NS) und auf diese eine senkrechte Linie (OW): so hat man das Verlangte, oder den Plan orientirt.

C. Die Sehnenlinie des Proportionalzirkels. — Man kann diese Linie auf der andern Fläche der Liniale, als worauf man die arithmetische Linie (§. 115. Geod. II.) verzeichnete, sich auf folgende Art verschaffen: Man theile einen Halbkreis (fig. 183.), dessen Durchmesser AB gleich ist der aus C (fig. 184. Tab. XVII.) gezogenen geraden Linie CM = CN, in 180° (§. 104. Anm.), und ziehe aus A die Sehnen der Bogen von 1, 2, 3 . . . Graden. Diese Sehnen trage man dann auf CM und CN, indem man wenigstens von 5°—5°, die Zahl der Grade beyschreibt.

Gebrauch. — 1. Dieser Linie kann man sich nun selbst wieder zum Theilen des Kreises bedienen; denn zieht man mit der Sehne von 60° d. i. C60 als Halbmesser eine Kreislinie (fig. 183.): so theilen die übrigen Sehnen diese in die verlangten Theile.

2. Einen Winkel z. B. ABD (fig. 185.) zu messen. — Man trage den Schenkel AB oder einen Theil aB, den man mit dem Zirkel faßt, von C z. B. nach α auf der Chordenlinie des Proportionalzirkels. Man fasse eben so die Sehne ad und trage sie von α auf den entsprechenden Punkt δ. Faßt man nun die Weite zwischen 60 und 60 und trägt diese gerade von C z. B. nach

nach e; so giebt die hier beygeschriebene Zahl z. B. 63 die Anzahl der Grade des Bogens, als Maß des Winkels DBA. Denn es ist CR : RS (= Ce) = Cα : αδ; ist daher nach der Einrichtung des Instruments Ce oder RS die Sehne von 63°, wenn CR der Halbmesser ist: so ist auch, wenn man Cα (= Ba) als Halbmesser nimmt, αδ d. i. ad die Sehne eines Bogens von 63°.

Würde man in dem nach 1. getheilten Halbkreis mehrere konzentrische Halbkreise, und dann nach C die Radien von den äußersten Theilpunkten ziehen; so könnte man die Größe des Winkels ABD auch so bestimmen: Man beschriebe mit dem Halbmesser irgend eines jener konzentrischen Kreise aus B z. B. den Bogen AD, und trüge die Sehne AD auf die eingebildete Sehne des ausgewählten Halbkreises; so würde der entsprechende Grad des größten eingetheilten Halbkreises die Größe des Winkels angeben.

3. Umgekehrt, einen Winkel z. B. von 63° zu konstruiren. Man ziehe willkührlich AB (fig. 185.) und aus B den Bogen ax, nehme dann auf der Chordenlinie die Chorde 63° d. i. Ce, die man zwischen 60, 60 bringt; aB trage man dann von C nach α und die Weite αδ von a nach d; so ist der Winkel ABD, wenn man durch d BD zieht, = 63°.

Dasselbe kann man mittels eines jener konzentrischen Halbkreise (fig. 183.) thun.

Anmerkung.

Aus der Art, wie man die Chordenlinie für den Proportionalzirkel verzeichnet, sieht man leicht, daß diese nicht die größte Genauigkeit gewähren könne. Folgende Tabelle giebt uns α) eine andere, größere Genauigkeit versprechende, Methode an die Hand:

Grade	Chord.	Grade	Chord.	Grade	Chord.	Grade	Chord.
1	87	24	2079	47	3987	70	5736
2	175	25	2164	48	4067	71	5807
3	262	26	2250	49	4147	72	5878
4	349	27	2334	50	4226	73	5948
5	436	28	2419	51	4305	74	6018
6	523	29	2504	52	4384	75	6088
7	610	30	2588	53	4462	76	6157
8	698	31	2672	54	4540	77	6225
9	785	32	2756	55	4617	78	6293
10	872	33	2840	56	4695	79	6361
11	958	34	2924	57	4772	80	6428
12	1045	35	3017	58	4848	81	6494
13	1132	36	3090	59	4924	82	6561
14	1219	37	3173	60	5000	83	6626
15	1305	38	3256	61	5075	84	6691
16	1392	39	3338	62	5150	85	6756
17	1478	40	3420	63	5225	86	6820
18	1564	41	3502	64	5299	87	6884
19	1650	42	3584	65	5373	88	6947
20	1736	43	3665	66	5446	89	7009
21	1822	44	3746	67	5519	90	7071
22	1908	45	3827	68	5592		
23	1994	46	3907	69	5664		

Nimmt man nun auf einem 10000theiligen Maßstabe (§. 115. Geod. I.) 87 Theilchen für die Sehne 1°, 175 für die Sehne 2° u. s. w. mit dem Handzirkel und trägt diese Längen von C nach M und N (fig. 184.): so hat man die verlangte Chordenlinie. Würde man von den Zahlen dieser Tafel *) die letzte Ziffer abschneiden: so nähme man jene Längen von einem 1000th. Maßstabe.

β)

*) Die Zahlen derselben sind aus den Sinustafeln so genommen, daß man für die Sehnen von 1° die Zahl für den Sinus

β) Dieselbe Tabelle macht die Bereitung eines geradlinigen Transporteurs oder einer Sehnenskala leicht. Zieht man nämlich auf Elfenbein oder Messing, die gerade Linie AB (fig. 186.), auf diese senkrecht AC, und jener parallel CD; trägt von einem 10000 oder 1000th. Maßstab z. B. die berechnete Sehne 1° von C nach D, die von 2° von A nach B zu u. s. w. so hat man den geradlinigen Transp., dessen man sich mit mehr Sicherheit als des Transporteurs (§. 31. Geod. II.) und des Proportz. nach seiner vorhin beschriebenen Einrichtung zur Größebestimmung eines Winkels bedienen kann. Wollte man z. B. die Größe des Winkels ABD (fig. 185.) bestimmen: so faßte man, weil auf den geradlinigen Transp. die Sehne 60° der Halbmesser des Kreises ist, zu welchem diese berechneten Sehnen gehören, die Weite A 60° mit dem Handzirkel, zöge mit diesem aus B den Bogen da, und trüge dann die Sehne da z. B. von A nach c; der hier beygeschriebene Grad zeigte die Größe des Winkels.

Hätte man das Loth AC in 5 gleiche Theile getheilt, bis nach e die Sehne von 41°, nach d die von 40° getragen: so gäbe das oberste Querstückchen des △ bde $\frac{60'}{5}$ d. i.

Sinus 30' = 1/2° , und so für die Sehne 2° die Zahl für den Sinus 1° u. s. w. nahm. Ist nämlich der Halbmesser BA (fig. 185.) = 10000 Theilen; so ist aus jenen Sinustafeln, der Sinus 30' = 87; der Sinus 1° = 174 u. s. w. Nun nehmen wir aber an, daß der Halbmesser Ba eines Kreises, zu welchem die berechneten Sehnen gehören, = 5000 sey; daher müssen die Sehnen und halbe Sehnen oder die Sinusse auch nur die Hälften der zum vorigen Kreise gehörigen Sehnen und Sinussen seyn. Denn BA : Ba = AD : ad. Ist daher AD die Sehne 1°: so ist ihre Hälfte ad der Sinus 30' u. s. w. Erst durch Trigonometrie wird diese Erklärung ganz verstanden.

d. i. 12', das zweyte 24, u. s. w. so, daß wenn jene Sehne da von n bis f könnte aufgetragen werden, jener Winkel = 40° 24' wäre. Es erhellt, daß man die Winkel immer genauer bestimmen könne, in jemehrere gleiche Theile AC getheilt würde.

Wenn man die Transversalen C 5°, 5° 10° u. s. w. wie in der Figur zieht: so hat man auf ähnliche Art, wie bey dem verjüngten Maßstabe, durch blose Zeichnung an m1, n2, n3 u. s. w. 1, 2, 3 Grad u. s. w. so, daß der geradlinige Transp. leicht zu verzeichnen wäre, wenn die Sehnen von 5—5 Graden bey größeren, wie bey kleineren Winkeln gleichförmig wüchsen; was bey jenen der Fall nicht ist, wie dieß aus obiger Tafel erhellt.

D. Tob. Mayers Rezipiangle. Dieses Instrument, dessen man sich statt des Astrolabiums mit Vortheil beym Feldmessen bedient, besteht nach seiner einfachsten Einrichtung, wie sie Mayer selbst in s. mathemat. Atlas angiebt, aus 2 messingnen Linialen LM, NR (fig. 187.) mit Diopteren versehen, und um den Mittelpunkt C so beweglich, daß das obere Linial NR (die Alhidadenregel), welches etwas kürzer als das untere ist, über dieses allein bewegt werden kann. Auf NR ist ein geradliniger Transporteur verzeichnet, und die Punkte B und A müssen von C genau um die Sehne von 60° abstehen, so daß bey der Oeffnung des Instruments, wie sie die Fig. zeigt, die Sehne AB nur auf den geradlinigen Transp. darf getragen werden, um sogleich die Größe des Winkels zu wissen. Bey O ist noch eine Hülse oder Röhre mit einer Stellschraube befestigt, um diesen Winkelmesser noch auf einen Stab oder ein anderes Stativ stellen zu können.

In den Comment. Soc. R. Goett. T. II. p. 336. hat Mayer dasselbe Instrument mit einigen Verbesserungen angegeben, welche dessen Sohn Joh. Tobias Mayer in seiner prakt. Geometrie Th. I. S. 408. anführt.

Der

Der Geometrie
dritter Theil.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Von der Lage der geraden Linien gegen ebene Flächen, und der ebenen Flächen gegen einander.

§. 146. Erkl. Eine Linie oder Fläche stößt mit einer Ebene zusammen, wenn sie mit ihr einen Punkt gemein hat. Geschieht dieß so, daß die nächsten Theile vor und nach dem Zusammenstoßen auf derselben Seite der Ebene bleiben; so wird diese von der Linie oder Fläche berührt. Liegen aber die Theile von diesen vor und nach dem Zusammenstoßen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene; so werden jene von dieser geschnitten.

Zusatz 1. Also wird jede gerade Linie, die man auf eine Ebene zieht, verlängert von dieser geschnitten. Denn keine gerade Linie kann zum Theil in der Ebene und zum Theil über oder unter derselben liegen (§. 12.).

Zu.

Zusatz 2. Dasselbe gilt von jeder Ebene in Ansehung einer andern. Denn würde eine Ebene, die mit der andern zusammenstößt, verlängert, nicht von dieser geschnitten; so würde man in dem beyden Flächen gemeinschaftlichen ebenen Theile eine gerade Linie ziehen können, welche in der einen und in der andern Ebene genugsam verlängert zum Theil in der einen, zum Theil über oder unter derselben läge.

Zusatz 3. Also können zwey Ebenen sich einander nicht blos berühren.

§. 147. Lehrsatz. **Zwey gerade Linien AB, CD (fig. 188.), welche sich schneiden, liegen in derselben Ebene.**

Beweis. Durch die gerade Linie AB und durch einen willkührlich angenommenen Punkt von CD denke man sich eine Ebene gelegt (§. 13. II.). Da nun der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt E in derselben Ebene mit AB liegt: so hat DC einen zweyten Punkt mit dieser gemeinschaftlich, liegt also mit AB ganz in derselben Ebene.

§. 148. Lehrsatz. **Zwey ebene Flächen können sich nur in einer geraden Linie schneiden.**

Beweis. Der Schnitt ist 1. eine Linie, weil die Flächen keine Dicke haben; 2. eine gerade Linie. Denn eine gerade Linie, von einem Punkte des Durchschnitts zum andern gezogen, liegt nothwendig ganz in jeder von beyden Ebenen, sie ist folglich der gemeinschaftliche Durchschnitt selbst.

Zusatz. Also kann man sich durch eine gerade Linie unendlich viele Flächen gelegt denken.

§. 149. Erkl. Eine gerade Linie AB (fig. 189.) ist auf die Ebene EF senkrecht, wenn sie auf alle geraden Linien BC, welche man durch den Punkt B, wo jene auf die Ebene trift, ziehen kann, senkrecht ist. Eine gerade Linie ist mit der Ebene parallel, wenn sie ins Unendliche verlängert, mit ihr nie zusammenstößt.

Zusatz 1. Daß die senkrechte Linie AB, welche man von einem Punkte A ausserhalb der Ebene auf diese fallen läßt, unter allen möglichen Linien die kürzeste, folglich der Abstand jenes Punktes A von EF sey; 2. daß eben diese senkrechte Linie AB die einzige sey, die man von A auf EF, so wie von B zu A ziehen kann, erhellt aus dem, was wir oben in den §§. 64. 65. von den senkrechten Linien bemerkten.

Zusatz 2. Ist AB auf EF senkrecht: so ist die auf AB senkrechte Linie AD || EF. Denn könnte jene mit dieser jemals z. B. in G zusammenstossen: so wäre, weil GBA = R, DAB < R.

Zusatz 3. Eine gerade Linie AB (fig. 190.) kann auf 2 zusammenstossenden Ebenen LM, LP nicht zugleich senkrecht seyn. Denn die Ebenen schneiden sich in LN (§. 146. Zus. 3. und §. 148.); zieht man nun auf NL willkührlich AD und BD: so ist BAD < R, folglich AB auf LP schief.

§. 150. Lehrsatz. Wenn AB (fig. 191.) auf 2 geraden Linien BC, BD der Ebene LM senkrecht ist: so ist sie auf LM selbst senkrecht.

Be-

Beweis. Man mache die Verlängerung BE von BC gleich BC, eben so BF = BD und ziehe FC, ED; man nehme in einem der 4 Winkeln um B z. B. innerhalb EBD irgend eine dritte Linie z. B. BH an, die man nach G verlängert: so ist 1) ED = FC und der Winkel BED = FCB (§. 35.). Da folglich auch △ GBC = △ EHB, so ist 2) GB = BH.

Zieht man nun die übrigen Linien in der Figur: so ist den gleichen (?) △△ BAC, BAE 3) AC = AE; aus demselben Grunde auch 4) AF = AD. Es sind folglich, da auch CF = DE (1), die △△ AFC, ADE wechselſ. gleichseitig, also 5) ACF = AED, daher △ AGC = ADH (§. 35.), folglich 6) AG = AH und die △△ AGB, ABH wechselseitig gleichseitig, folglich ABG = ABH; also ist AB, welche senkrecht auf 2 geraden Linien ist, auch senkrecht auf irgend eine dritte BH der Ebene LM, daher auf diese selbst.

§. 151. Lehrsatz. **Wenn von 2 Parallellinien AB, CD (fig. 192.) die eine AB auf die Ebene NP senkrecht ist: so ist es auch CD.**

Beweis. Man ziehe in der Ebene NP DE auf DB senkrecht, mache DE = AB und ziehe AD, AE, BE. Nun ist (§. 35.) der Voraussetzung gemäß △ ADB = △ BDE, folglich BE = AD; also die Dreyecke AEB, AED wechselseitig gleichseitig, also ADE = ABE = R (§. 149.), folglich ist DE nicht nur auf DB, sondern auch auf DA senkrecht, also auch auf die Ebene BDA selbst (§. 150.). Da nun CD mit AB in derselben Ebene liegt: so bildet auch die auf BD senk-

rechte DE mit CD eben so gut einen rechten Winkel, wie BE mit AB (§. 149.), also ist CD senkrecht auf DE, aber auch auf BD (§. 56. Zus. 1.), folglich auch auf die Ebene BDE, d. i. auf NP selbst.

Zusatz 1. Wenn also 2 geraden Linien AB, CD senkrecht auf PN sind: so sind sie parallel. Denn wäre AB ∧ CD: so ziehe man z. B. die Parallele BF. Dann wäre diese auch senkrecht auf PN (durch den Satz), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

Zusatz 2. Wenn 2 geraden Linien AB, CD (fig. 193.) mit einer dritten EF parallel sind: so sind sie selbst parallel, wenn sie gleich nicht alle 3 in derselben Ebene liegen. Denn errichtet man in der Ebene, wo AB, EF liegen, die senkrechte Linie AF, und in der Ebene, wo CD, EF liegen, das Loth FD: so ist nun EF auf die Ebene AFD senkrecht (§. 150.), folglich auch AB, CD (durch den Satz), also AB || CD (Zus. 1.).

§. 152. Lehrsatz. **Wenn 2 Winkel BEC, AFD (fig. 194.) in verschiedenen Ebenen so liegen, daß EB || AF, EC || FD: so sind die Winkel gleich.**

Beweis. Macht man FG = BE und FH = EC und zieht die Hülfslinien: so sind GB und CH ‡ EF, d. i. BG || CH (§. 151. Zus. 2.) und BG = EF und CH = EF, folglich auch BG ‡ CH, also ist auch GC ein Parallelogramm, folglich GH = BC und △△ BEC, GFH wechselseitig gleichseitig, folglich die genannten Winkel gleich.

§. 153.

§. 153. Lehrsatz. Wenn AC, FC auf DE senkrecht sind (fig. 195.); so ist AB, das Loth auf CF, selbst auf die Ebene PQ, in welcher CF, DE liegen, senkrecht.

Beweis. DE ist auf die Ebene ACF senkrecht (§. 150.), auf diese ist daher auch BH, die man mit DE parallel zieht, senkrecht (§. 151.), folglich BH auf AB (§. 149.) oder AB auf BH, also auch PQ selbst (§. 150.) senkrecht.

Zusatz 1. Ist also AB auf PQ und AC auf DE senkrecht: so ist auch BC auf DE senkrecht. Denn wäre dieses nicht: so sey auf DE nach §. 47. CG senkrecht errichtet und auf diese das Loth AG gefällt (§. 48.), dann würde auch AG auf PQ senkrecht seyn (durch den Satz), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

Zusatz 2. Wenn AB auf PQ, und BC auf DE senkrecht ist: so ist auch AC auf DE senkrecht. Denn wäre dieses nicht: so sey irgend eine andere AN auf DE senkrecht gefällt. Man ziehe BN, dann wäre auch BN auf DE senkrecht (Zus. 1.), was unmöglich ist (§. 149. Zus. 1.).

§. 154. Aufgabe. Aus einem Punkte A ausserhalb der Ebene PQ auf diese das Loth AB zu fällen.

Auflösung. Auf die in der Ebene willkührlich gezogene DE fälle man das Loth AC, errichte CF in PQ senkrecht: so ist das auf CF von A gefällte Loth selbst auf PQ senkrecht (§. 153.).

§. 155. Aufgabe. Im Punkte B der Ebene NP (fig. 192.) eine senkrechte Linie BA zu errichten.

Auf=

Auflösung. Man fälle nach §. 154. aus C das Loth CD auf NP; ziehe BA || CD in der Ebene CDB: so ist BA das gesuchte Loth (§. 151.).

§. 156. Erkl. Denkt man sich die Ebene LP (fig. 190.) über LM liegen, und jene, indem sie sich um NL, wo beyde Ebenen zusammenstossen, bewegt, von LM entfernen: so bilden beyde Ebenen (als die Schenkel,) mit NL (der Scheitellinie) einen Winkel, welchen man den Flächenwinkel (angulum planum) nennt.

Nimmt man nun in der Scheitellinie NL irgend einen Punkt D an, und zieht sowohl in der Ebene LP als in LM die senkrechten Linien AD, BD: so entfernt sich AD, indem LP um NL bewegt gedacht wird, genau um dieselbe Grösse von BD, als LP von der Ebene LM; d. i. der geradlinige Winkel ADB ist dasselbe, was der Flächenwinkel, oder die Neigung beyder Ebenen ist, so wie er auch die Neigung einer blosen geraden Linie AD gegen die Ebene LM ausdrückt.

Den Flächenwinkel selbst bezeichnet man auf ähnliche Art, wie den geradlinigen z. B. PLM, oder ELO, oder ENO.

Zusatz 1. Also hat der Flächenwinkel dasselbe Maß, welches der auf die angegebene Art gebildete geradlinige Winkel hat.

Zusatz 2. Ist daher ADB ein rechter Winkel: so stehen beyde Ebenen senkrecht aufeinander u. s. w. 2. Beyde Ebenen bilden 2 Winkel, welche zusammen = 180°. 3. So viele Flächen auch durch NL gehen mögen; so sind doch die dadurch gebildeten Winkel zusammengenommen

men = 4R. 4. Schneiden sich 2 Flächen, so sind die an der Scheitellinie entgegengesetzten Winkel gleich. 5. Gleiche Neigungswinkel gehören überhaupt zu gleichen Flächenwinkeln; diese sind also, wie jene kongruent.

Zusatz 3. Stehen 2 Flächen senkrecht aufeinander: so ist jede gerade Linie, die man aus der einen Ebene senkrecht auf die Scheitellinie ziehen mag, auch lothrecht auf die andere Ebene, indem sie nicht nur auf die Scheitellinie, sondern auch auf den Schenkel des rechten Neigungswinkels senkrecht ist (§. 150.).

Zusatz 4. Wenn zwey Ebenen CK, NL (fig. 196.) auf eine dritte GE senkrecht sind: so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt AB auch auf GE senkrecht. Denn aus Zusatz 3. folgt, daß, wenn CK auf GE senkrecht ist, das Loth AB, das man auf GE durch irgend einen Punkt B der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie fällt, nothwendig in CK liegt. Folglich muß auch das Loth, das man auf GE durch B fallen läßt, in einer jeden der beyden Ebenen CK, NL liegen; es kann also nur der gemeinschaftliche Durchschnitt AB dieses Loth seyn.

§. 157. Erkl. Zwey Ebenen sind parallel, wenn sie ohne Ende verlängert nicht zusammenstoßen.

Zusatz 1. Ist eine gerade Linie auf 2 Ebenen zugleich senkrecht: so sind sie parallel. Denn stießen sie zusammen; so höbe sich die Voraussetzung auf (§. 149. Zusatz 3).

Zusatz 2. Werden 2 parallele Ebenen von einer dritten geschnitten: so sind auch die Durchschnittslinien paral-

parallel. Denn sonst müßten die Ebenen selbst zusammenstoßen.

Zusatz 3. Wenn eine gerade Linie AC (fig. 197. Tab. XVIII.) von der Ebene LM in A geschnitten wird; so wird sie verlängert auch von jeder andern mit LM parallelen Ebene NO geschnitten. Denn man fälle auf NO die Lothe AB, CD (§. 154.): so liegen sie als Parallellinien in derselben Ebene ACDB. Nun sind aber die Durchschnittslinien BD, AF, in welchen NO, LM von ACDB geschnitten werden, parallel (Zus. 2.), also wird BD von der nicht parallelen Linie AC, wenn man beyde verlängert, geschnitten, folglich selbst AC von der Ebene, in welcher BD liegt.

Zusatz 4. Schneidet daher die Ebene ACF eine von 2 parallelen Ebenen: so schneidet sie auch die andere. Denn wie AC stößt selbst ACF mit NO zusammen, folglich schneidet sie diese (§. 146. Zus. 3.).

Zusatz 5. Also ist durch A mit der Ebene NO nur eine parallele Ebene LM möglich.

Zusatz 6. Wenn 2 Ebenen LM, NO parallel sind: so liegt die durch den Punkt A der Ebene LM gehende und mit BD in NO parallele AF in LM. Denn, schnitte sie LM: so würde sie verlängert auch von NO geschnitten (Zus. 3.), folglich stieße sie, indem BD AF als parallele Linien in derselben Ebene liegen, verlängert mit BD zusammen gegen die Voraussetzung.

Zusatz 7. Wenn auf eine von 2 parallelen Ebenen LM, NO die gerade Linie GH senkrecht ist: so ist sie es auch auf die andere. Denn GA verlängert wird

von

von NO in B geschnitten (Zus. 3.). Zieht man nun mit 2 beliebigen AI, AF, in der Ebene LM liegend, parallel BH, BD: so liegen diese in NO (Zus. 6.) Nun ist die auf AI, AF senkrechte GA (§. 149.) auch auf BH, BD senkrecht, also auch auf NO.

Zusatz 8. Also stehen parallele Ebenen gleich weit voneinander ab.

Zusatz 9. Aus §. 156. Zus. 1. folgt, daß 2 parallele Ebenen, von einer dritten geschnitten, in Betreff der Winkel, welche sie mit dieser dritten Ebene bilden, dieselbe Eigenschaften haben, als 2 parallele Linien in Beziehung auf die dritte sie schneidende gerade Linie.

Zusatz 10. Wenn daher 2 Ebenen einer dritten parallel sind: so sind sie selbst parallel. Denn denkt man sich eine andere Ebene, welche jene dritte schneidet, so schneidet sie auch die andern (Zus. 4.); dann erhellt nach Zus. 9. die Wahrheit dieses Satzes.

§ 158. Lehrsatz. **Wenn man von einem Punkte I ausserhalb der Ebene GE (fig. 198.) auf verschiedene Punkte K, L, M dieser Ebene die geraden Linien IK, IL, IM zieht, welche dann durch eine mit GE parallele Ebene ge geschnitten werden; so werden diese geraden Linien I. proportionell geschnitten; II. die Figur klm ist ähnlich der Figur KLM.**

Beweis v. I. Die geraden Linien kl, lm, mk sind, als Durchschnittslinien der Ebenen IKL, ILM, IKM mit der Ebene ge, parallel den Durchschnittslinien KL, LM, MK derselben Ebenen mit GE (§. 157. Zus. 2.), also △ IKL ∽ △ Ikl; eben so △

ILM

ILM ∽ △ Ilm u. s. w. (§. 152.); folglich IK : Ik = KL : kl = IL : il u. s. w. und IK : Ik = IL, Il = IM : Im ...

Beweis v. II. Aus denselben Proportionen hat man KL : kl = LM : lm = KM : km, also △ KLM ∽ △ klm.

Man nehme so viele Punkte A, B, C, D, F ... an, als man will: so bleibt 1) der Bew. v. I. derselbe; wenn man sich 2) die Diagonalen AC, AD ... ac, ad ... gezogen denkt: so beweist man auch auf dieselbe Art II., daß nämlich △ ABC ∽ abc, u. s. w. sey, folglich die 2 Polygone ABCDF ... abcdf ... selbst einander ähnlich sind.

Zusatz 1. Aus dem, daß die genannten Polygone ähnlich und auch △ KLM ∽ △ klm folgt, daß die Flächenräume der Schnitte abcdf, klm sich zueinander verhalten, wie die der Figuren ABCDF, KLM. Denn ABCDF : abcdf = $AB^2 : ab^2$ (§. 134.). Aber AB : ab = IA : Ia (wegen △ IAB ∽ △ Iab) oder $AB^2 : ab^2 = IA^2 : Ia^2 = IM^2 : Im^2$ (durch den Satz) = $LM^2 : lm^2$ (wegen △ IML ∽ △ Iml), d. i. $AB^2 : ab^2$ = KLM : klm (§. 133. Zus.) ꝛc.

Zusatz 2. Hieraus erhellt weiter, 1) daß die Flächenräume ABCDF, abcdf sich zueinander verhalten, wie die Quadrate zweyer geraden Linien IA, Ia, vom Punkte I nach 2 entsprechenden Punkten jener Figuren gezogen, und folglich wie die Quadrate der Höhen IP, Ip oder der Lothe, aus I auf die Ebenen GE, ge gezogen.

2)

2) ist klar, daß wenn die Flächenräume ABCDF, KLM gleich sind, auch die Flächenräume abcdf, klm gleich seyen.

Zusatz 3. Alle diese Sätze bleiben gültig, wenn der Punkt I, statt den geraden Linien IA, IB, IC... und IM, IL... gemein zu seyn, für jede Figur verschieden ist, sobald er nur gleichen Abstand über ge hat.

§. 159. Aufgabe. Durch A eine Ebene LM (fig. 197.) parallel der gegebenen NO zu legen.

Auflösung. Man ziehe AB auf NO lothrecht, und AI, AF parallel mit den beliebigen BD, BH; so ist AB auch auf AI, AF, folglich auf FAI selbst senkrecht, diese Ebene daher parallel NO (§. 157. Zus. 1.).

§. 160. Erkl. Wenn drey oder mehrere geradlinige Winkel ACB (fig. 199.), ACD, BCD ... in verschiedenen Ebenen so liegen, daß sie alle den Scheitel C, und jede 2 nächste einen Schenkel gemein haben: so heißt die Neigung, welche alle Ebenen dieser Winkel gegeneinander haben, ein körperlicher Winkel, oder eine körperliche Ecke (angulus solidus). Die Winkel ACB, ACD ... heißen ihre Seitenflächen (hedrae) und die Flächenwinkel, die diese miteinander machen, ihre Winkel. Eine Ecke von 3 Seitenflächen heißt ein körperliches Dreyeck, von 4 ein körperliches Viereck ... Vieleck.

Zusatz 1. Da in der körperlichen Ecke C die Schenkel CB, CA, CD ohne Ecke verlängert werden können; so bleibt der körperliche Raum innerhalb derselben nach der Seite BAD ꝛc. unbegrenzt.

Zu-

Zusatz 2. Da durch die Seitenflächen und Winkel jede körperliche Ecke gegeben ist: so sind jede 2 körperlichen Ecken, deren Seitenflächen und Winkel nach der Reihe gleich sind, kongruent.

Zusatz 3. Die zur Bildung einer körperlichen Ecke nöthigen ebenen Winkel sind 1) zusammen $< 4R$. Denn Winkel, die $= 4R$ sind, liegen in derselben Ebene. 2) Aber von 3 ebenen Winkeln, die eine Ecke A (fig. 199. I.) machen, sind jede 2 zusammen $>$, als der dritte. Denn sind die Winkel BAC, CAD, BAD gleich: so ist der Satz für sich wahr; ist aber jenes nicht der Fall, so sey z. B. CAB der größte Winkel. Macht man nun $CAE = CAD$ und zieht BC; macht ferner $AD = AE$, und zieht BD, CD: so ist auch $EC = CD$. Aber $CD + DB > BE + EC$, also $DB > BE$, folglich $BAD > BAE$, daher $CAD + BAD > BAC$.

Zweyter Abschnitt.

Von der Gleichheit und den Verhältnißen geometrischer Körper.

---

§. 161. Erkl. Der körperliche Raum kann auf sehr mannigfaltige Art begrenzt werden. Daher mannigfaltige geometrische Körper. Diese sind aber insgesammt 1. in Rücksicht ihrer Oberfläche oder ganzen Grenze entweder platte (mit einer Oberfläche mit ebenen Figuren), oder kantige (— mit Flächenwinkeln), eckige

eckige (— mit körperlichen Ecken), oder runde (— mit krummen Flächen) und zwar entweder ganz runde oder ganz eckige, je nachdem ihre Oberfläche entweder aus einer einzigen krummen Fläche, oder aus lauter ebenen Figuren besteht; oder die Körper sind von vermischter Gestalt.

2. Die ganz eckigen Körper sind in Rücksicht der Ebenen, die sie begrenzen, entweder reguläre oder irreguläre, und 3. in Beziehung auf die Anzahl der sie begrenzenden Ebenen nennt man sie dreyeckige (tetraëdra), fünfeckige (pentaëdra) . . . überhaupt Polyedra.

Zusatz. 1. Aus Zus. 1. §. 160. folgt, daß die Oberfläche eines ganz eckigen Körpers wenigstens aus 4 ebenen Figuren bestehen müße.

Zusatz 2. Aus Zus. 3. §. 160. folgt, daß A), inwiefern ein geometrischer Körper von gleichseitigen Dreyecken begrenzt ist, nur folgende 3 regulär sind: 1) der dreyeckige fig. 199. I. (welcher von 4 —), 2) der achteckige II. (ogdaëdrum, welcher von 8 —); 3) der zwanzigeckige III. (icosaëdrum, welcher von 20 gleichseitigen Dreyecken) begrenzt ist. B) der Würfel IV. (cubus s. hexaëdrum) ist der einzige von lauter gleichen Quadraten begrenzte (reguläre) Körper. C) Inwiefern die Seitenflächen reguläre Polygone sind, entsteht einzig nur der zwölfeckige (regul.) Körper V. (dodecaëdrum, von 12 regulären Fünfecken begrenzt).

I. Vom

I.

Vom Prisma, Parallelepipedum und Würfel.

§. 162. Erkl. Prisma ist der geometrische Körper, dessen Oberfläche aus zwey ebenen, geradlinigen parallelen und kongruenten Figuren (des Prisma Grundflächen) und zwischen diesen aus soviel Parallelogrammen (des Prisma Seitenflächen) besteht, als eine Grundfläche Seiten hat. Nach der Anzahl dieser Seiten heißt daher das Prisma dreyeckig (fig. 200.), viereckig (fig. 202.) .. sechseckig (fig. 203.) u. s. w. überhaupt vieleckig.

Das viereckige Prisma, dessen Grundflächen auch Parallelogramme sind, heißt insbesondere Parallelepipedum (fig. 202.). Die Durchschnittslinien der Seitenflächen des Prisma (wie AB .. fig. 200.) heißen dessen Seiten. Sind diese auf die Grundflächen senkrecht; so heißt das Prisma ein senkrechtes, gerades (fig. 202. 205.); sonst ein schiefes. Das Loth von einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere, ist des Prisma Höhe.

Das Parallelepipedum ist rechtwinklig, wenn die Seitenflächen lauter Rechtecke sind; sind dessen Seitenflächen und Grundflächen lauter gleiche Quadrate; so heißt es Würfel (fig. 205.).

Zusatz 1. Die Höhe des Prisma ist immer dieselbe, aus welchem Punkte der Grundfläche das Perpendikel auf die andere gezogen werden mag (§. 157. Zus. 8.).

Zu-

Zusatz 2. Nimmt man hier, wie bey den übrigen regulären Körpern den Begriff der Bewegung zu Hilfe: so kann man sich das senkrechte Prisma rc. dadurch entstanden denken, daß sich die untere Grundfläche in einer auf sie senkrechten Linie aufwärts bewegt.

§. 163. Lehrsatz. Zwey Prismen, welche eine kongruente Grundfläche, eine kongruente Seitenfläche und den von diesen gebildeten Flächenwinkel gleich haben, sind kongruent.

Beweis. 1) Aus der Kongruenz z. B. der untern Grundfläche des einen Prisma mit der untern des andern Prisma folgt die wechselseitige Gleichheit der Seiten dieser Grundflächen, und die Kongruenz der gleichnamigen Ecken. 2) Aus der Kongruenz der 2 Seitenflächen und der Gleichheit des im Lehrsatze ausgedrückten eingeschlossenen Winkels folgt, daß die oberen Endpunkte jener Seitenflächen von ihren untern Grundflächen gleich weit abstehen, beyde Prismen folglich einerley Höhe haben (§. 162. Zus. 1.). Da nun der Prismen Grundflächen unter sich kongruiren (§. 162.): so kongruiren auch beyder Prismen obere Grundflächen, folglich sind auch ihre Seiten und Ecken wechselseitig gleich; also sind die Grenzen der Parallelogramme in dem einen wie im andern Prisma gleich bestimmt, sie selbst daher, also auch die Prismen kongruent.

Zusatz. Also sind Würfel von gleichen Seiten kongruent.

§. 164. Lehrsatz. Die Figur efg (fig. 204. 2te), welche der mit der Grundfläche ABC parallele Schnitt

des Prisma Ai bildet, ist mit der Grundfläche kongruent.

Beweis. Aus §. 157. Zus. 2. erhellt, daß ef || AB, eg || AC u. s. w. daß folglich der Winkel efg || ABC (§. 152.) u. s. w. und Af, Bg ꝛc. Parallelogramme sind, also ef = AB, eg = AC ꝛc. ist, also.

§. 165. Lehrsatz. Wenn man durch die in gleichen Abständen gemachten Theilpunkte der Seite eines Prisma Ac (fig. 204. 1te) ebene und mit der Grundfläche parallele Flächen EG, HK ... legt: so sind I. alle durch diese Schnitte entstandenen Prismen AG, EK, Hc ... kongruent. II. Die Prismen, folglich auch die Parallelepipeden verhalten sich wie ihre Seiten und ihre Höhen.

Beweis von I. 1) Die Grundflächen AC, EG der Prismen AG, EK sind kongruent (§. 135); 2) da AE = EH, und EI AF Parallelogrammen sind: so ist auch BF = AE, folglich auch EF = AB, daher auch der Winkel HEF = EAB (§. 152.), folglich sind auch die Seitenflächen AF, EI kongruent (§. 72.). 3. Der Flächenwinkel IEG = FAC (§. 157. Zus. 9.), also das Prisma AG kongruent mit EK (§. 163.). Eben so wird die Kongruenz jeder 2 andern Prismen bewiesen.

Beweis v. II. AH : AE = 2 : 1, und AK : AG = 2 : 1, daher AK : AG = AH : AE. Auf dieselbe Weise ist klar, daß eine dreymal größere Seite ein dreymal größerers Prisma u. s. w. giebt; so Ac : AG = Aa : AE.

Zieht

Zieht man nun ai auf AC senkrecht: so ist io die Höhe für das Prisma AG. Aber Ai || Eo, als Durchschnittslinien in Ansehung der schneidenden Ebene aiA, folglich Aa : AE = Ai : oi = Ac : AG.

§. 166. **I. Zwey Prismen Ac, Ai, folglich auch 2 Parallelepipeden, verhalten sich bey gleicher Höhe (ai = hr), wie ihre Grundflächen; und II. umgekehrt.**

Beweis v. I. Denkt man sich die Prismen durch die Ebenen EG, efg, wie oben geschnitten: so ist Ac: AG = ai : oi, und Ai : Af = hr : mr = ai : oi, folglich Ac : AG = Ai : Af, oder Ac : Ai = AG : Af. Denkt man sich nun die parallelen Schnitte beyder Prismen unendlich nah an ihren Grundflächen: so fallen die Prismen AG, Af mit diesen zusammen; die ganzen Prismen verhalten sich demnach = ABCD : ABC.

Zusatz. Ist daher ABCD = ABC: so ist auch Ac = Ai, d. i. Prismen und Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleichen Grundflächen sind gleich.

Beweis v. II. Es seyn die Grundflächen AC, ABC der Prismen Ac, Af gleich. Macht man nun wieder oi = mr und legt durch E die Ebene EG parallel mit AC; so ist AG = AF (durch den vorigen Zusatz). Aber Ac : AG = ai : oi, daher Ac : Af = ai : mr.

Zusatz 1. Da Ac : AG = ai : oi = ai : mr
und AG : Af = AC : abc.

so ist Ac : Af = ai. AC : mr. abc,

d. i. zwey Prismen sind in zusammengesetztem Verhältniße ihrer Grundflächen und Höhen, daher senkrechte

Prismen und rechtwinklige Parallelepipeden in zusammeng. Verh. ihrer Grundflächen und Seiten.

Zusatz 2. Also sind Würfel in triplizirtem Verhältnisse ihrer Seiten.

§. 167. Lehrsatz. Die Oberfläche irgend eines Prisma (die Grundflächen nicht mitgerechnet) ist gleich dem Produkte aus einer Seite des Prisma z. B. AB (fig. 203.) in den Perimeter eines Schnittes bdifihk, welchen eine Ebene macht, auf welche AB senkrecht ist.

Beweis. Da die parallelen Seiten des Prisma alle auf jene Durchschnittsebenen, oder bd, df... auf jene Seiten senkrecht sind: so kann man die Seiten als Grundlinien und bd, df...als die Höhen der Parallelogramme ansehen, welche die Oberfläche des Prisma ausmachen. Statt nun einzeln AB mit bd, CD mit df u. s. w. zu multiplizieren, um den Flächenraum jener Parallelogramme zu haben: so multiplizirt man eine Seite AB (= jeder andern) mit dem Perimeter jenes Schnittes.

Zusatz 1. Hieraus erhellt, wie man die Oberfläche eines senkrechten Prisma und rechtwinkligen Parallelep. (wo AB die Höhe und bdfhik = BDFHIK) erhält.

Zusatz 2. Bezeichnen daher S, s die Oberflächen zweyer Prismen, L, l die Längen und Σ, σ die Perimeter der auf diese senkrechten Schnitte: so ist $S : s = L. \Sigma : l. \sigma$, oder wenn $L = l$, $= \Sigma : \sigma$.

II.

II.

Vom Cylinder.

§. 168. Erkl. Der von zwey gleichen parallelen Kreisen (des Cylinders Grundflächen) und einer solchen Zwischenfläche begrenzte Körper BE (fig. 206.), daß jede gerade, von einem Punkte der Peripherie AKEA zur andern mit der die Mittelpunkte der Grundflächen verbindenden FC (— Axe) parallel gezogene Linie AB (— Seite) ganz innerhalb jener Fläche liegt, heißt Cylinder (cylindrus, Walze, Rundsäule). Das Perpendikel von einer Grundfläche zur andern ist dessen Höhe. Er heißt senkrecht (rectus), wenn CF (f. 1te) lothrecht auf die Grundflächen ist; sonst schief (f. 2te).

Zusatz 1. Man kann sich jeden Cylinder dadurch entstehen denken, daß sich die untere Grundfläche in einer stets parallelen Richtung aufwärts bewegt; den senkrechten aber dadurch, daß man sich das Rechteck CE um die Axe bewegt vorstellt.

Zusatz 2. Es erhellt leicht, daß alle Seiten des Cylinders gleich der Axe, folglich unter sich gleich, parallel und von einerley Richtung gegen die Grundflächen sind.

§. 169. Lehrsatz. Der Cylinder ist ein unendlicheckiges Prisma.

Beweis. Die Grundflächen sind kongruente reguläre Unendlichecke ꝛc.

Zusatz 1. Also gilt vom Cylinder was §§. 164. 166. von Prismen gesagt ist. Und Cylinder von gleichen Grundflächen und Axen, in welchen diese einerley Neigung gegen die Axe haben, sind kongruent (vergl. §. 163).

Zusatz 2. Wenn in 2 Cylindern C, c die Höhen den Durchmessern D, d ihrer Grundflächen proportional oder gleich sind; so wird aus jener Proportion §. 166. II. Zus. 1. $C : c = D^3 : d^3$.

Zusatz 3. Die Seitenfläche eines senkrechten Cylinders besteht aus unendlich vielen Rechtecken, sie ist folglich einem einzigen Rechtecke (des Cylinders Netz) gleich, dessen eine Seite = der Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe = der Seite AB, d. i., wenn h die Höhe des Cylinders bezeichnet, und d den Durchmesser der Grundfläche, $= hd\pi$ (§. 141. Zus.). Oder, wenn irgend eines Kreises Halbmesser durch ϱ bezeichnet wird:

so ist $hd\pi = \frac{2\varrho\pi . \varrho}{2}$ (§. 103. Zus. 2.) $= \varrho^2\pi$, daher $hd = \varrho^2$ und $h : \varrho = \varrho : d$ d. i. die Oberfläche des senkrechten Cylinders ist gleich einem Kreise, dessen Halbmesser ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche des Cylinders.

Zusatz 4. Bey senkrechten Cylindern oder Prismen von einerley Höhe ist $S : s = \Sigma : \sigma$ (§. 167. Zus. 2. hier bezeichnen Σ, σ die Perimeter der Grundflächen), oder, wenn die Grundflächen gleich sind, $= H : h$.

Anmerkung.

Die Seitenfläche eines schiefen Cylinders ist gleich seiner Länge AB, multiplizirt durch die Peripherie des Schnittes bgdh, gemacht wie §. 167. angezeigt worden. Um aber diese letzte Länge zu finden, bedient man sich in Praxi eines Fadens oder ledernen Gürtels, den man an eine solche Durchschnittsfläche zu legen sucht, auf welche AB senkrecht ist.

III.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 170. Erkl. Der geometrische Körper, welcher eine ebene geradlinige Figur, als Grundfläche, und eben so viele Dreyecke (die Seitenflächen) zur Grenze hat, als aus wieviel Seiten die Grundfläche besteht, ist eine Pyramide. Diese heißt dreyeckig (fig. 207. Tab. XIX.) viereckig u. s. w. in Rücksicht der Figur der Grundfläche; ferner gleichseitig, wenn alle Seiten wie AB, AC gleich sind. Die gemeinschaftliche Ecke A der Seiten heißt die Spitze, und das Loth AM von dieser auf die Grundfläche die Höhe der Pyramide, die entweder senkrecht oder schief ist. Das von 2 parallelen Flächen BCD, bcd (fig. 108.) begrenzte Stück BCDdbB ist eine abgekürzte Pyramide (pyramis truncata).

Ein Körper, welcher zur Grundfläche einen Kreis AGBA (fig. 209.) und eine solche Seitenfläche hat, daß jede gerade Linie AD aus der Peripherie jenes Kreises, zu demselben Punkt D ausserhalb der Grundfläche gezogen, ganz in der Seitenfläche liegt, ist ein Kegel; D dessen Spitze; jede DA eine Seite; DC dessen Axe; das Loth aus D auf die Grundfläche, dessen Höhe. Der Kegel ist, wie der Cylinder, entweder ein senkrechter (conus rectus f. 1te) oder schiefer (f. 2te), wie die Pyramide, gleichseitig oder ungleichseitig (scalenus). Fig. 210. zeigt einen abgekürzten Kegel (Stumpf, truncus coni).

Zu-

Zusatz 1. Man sieht, wie man sich den geraden Kegel könne entstehen denken, und daß in diesem alle Seiten gleich sind.

Zusatz 2. Eben so erhellt, daß die Höhe des Kegels entweder selbst die Axe (im senkrechten Kegel), oder doch mit dieser in Verhältniß steht.

Zusatz 3. Der senkrechten Pyramide Oberfläche ist gleich dem Produkte aus dem Umfange der Grundfläche in die halbe Höhe einer der (gleichen) Seitenflächen, oder in die halbe gemeinschaftliche Höhe.

Zusatz 4. Denkt man sich die Höhe der abgekürzten Pyramide (z. B. eE fig. 208.) unendlich klein, oder als den unendlichvielsten Theil der Höhe der ganzen Pyramide: so ist die abgekürzte Pyramide ein Prisma, indem in jenem Falle die Konvergenz der Seiten = 0 ist.

Zusatz 5. Stellt man sich daher jede Höhe von 2 Pyramiden in unendlich viele gleiche Theile getheilt vor, und durch alle Theilungspunkte mit der Grundfläche parallele Ebenen gelegt: so ist, wenn die Pyramiden gleiche Höhe und Grundfläche haben, jedes Prisma (Zus. 4.) zwischen 2 solchen Ebenen in der einen Pyramide gleich jedem Prisma zwischen den 2 entsprechenden Ebenen in der andern Pyramide (§. 166. I. Zus.), folglich sind alle diese Prismen in der einen Pyramide der Reihe nach gleich den Prismen in der andern Pyramide, also die Pyramiden selbst von gleicher Höhe und Grundfläche einander gleich.

§. 171. Lehrsatz. Eine jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, welches eine gleiche Grundfläche und gleiche Höhe mit jener hat.

Beweis. Es sey das dreyeckige Prisma ABC = DEF (fig. 211.); man ziehe auf den Seitenflächen AE, CE die Diagonalen BD, BF, und diesen folgend schneide man das Prisma durch die Ebene BDF: so erhält man DEFB (fig. 212.) d. i. eine dreyeckige Pyramide, deren Spitze in B, einem Punkte in der oberen Grundfläche des Prisma, und dessen Grundfläche die untere Grundfläche DEF des Prisma selbst ist; also die Pyramide DEFB hat gleiche Höhe und gleiche Grundfläche mit dem Prisma.

Den Rest des Prisma stellt fig. 213. dar. Man kann sich diesen Rest gleichsam als umgekehrt oder unter der Fläche ADFC verborgen denken, welcher daher eine viereckige Pyramide ist, deren Grundfläche das Parallelogramm ADFC, und deren Spitze B ist. Denkt man sich demnach die Diagonal CD gezogen: so kann man sich die ganze Pyramide ADFCB als aus 2 dreyeckigen Pyramiden ADCB, CFDB zusammengesetzt vorstellen, deren Grundflächen die gleichen Dreyecke ACD, CDF sind, und deren gemeinschaftliche Spitze B ist; beyde Pyramiden sind folglich gleich (§. 170. Zus. 5.). Nun ist ABC (die Grundfläche der Pyramide ADCB) die obere Grundfläche des Prisma, und als seine Spitze kann man sich auch den Punkt D, welcher zur unteren Grundfläche gehörte, vorstellen; folglich ist diese Pyramide gleich der Pyramide DEFB. Also ist DEFB der dritte Theil des dreyeckigen Prisma.

Da

Da man sich nun jedes Prisma aus soviel dreyeckigen Prismen, und jede Pyramide aus soviel dreyeckigen Pyramiden kann zusammengesetzt denken, als inwieviele Dreyecke das Polygon, als die Grundfläche, getheilt werden kann: so ist der Satz **allgemein** wahr.

Zusatz 1. Also ist jede Pyramide unter denselben Bestimmungen auch der 3te Theil eines Cylinders, $P = \frac{1}{3} C$ — (§. 169.), oder $P : p = \frac{1}{3} C : \frac{1}{3} c = C : c$ d. i. zwey Pyramiden P, p verhalten sich, wie zwey Prismen oder Cylinder C, c, welche mit jenen gleiche Höhen und gleiche Grundflächen haben.

Zusatz 2. Also gilt auch von den Pyramiden, was §. 166. Zus. und Zus. 1. vom Prisma gesagt worden ist.

Zusatz 3. Da, wie leicht zu zeigen, **der Kegel eine unendlicheckige Pyramide** ist; so ist auch dieser der dritte Theil eines Cylinders, oder eines Prisma, welches mit ihm gleiche Höhe und Grundfläche hat, und §. 166. mit Zus. daher auch Zus. 1. ebend. gilt auch von diesem.

Zusatz 4. Wenn daher der Kegel gleichseitig (oder senkrecht) ist: so sind alle jene Dreyecke, welche seine konvexe Oberfläche ausmachen, gleich einem einzigen △, dessen Grundseite ist die Peripherie der Grundfläche und dessen Höhe die Seite AD des Kegels, also ist des Kegels Seitenfläche so groß, als der Ausschnitt eines Kreises, dessen Halbmesser = der Seite des Kegels und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist (§. 103. Zus. 1. vergl. mit Zus. 2).

Ist

Ist also des Kegels Seite AD $= l$, der Durchmesser der Grundfläche (deren Peripherie $= p$) $= d = 2r$; so ist dessen Seitenfläche $= \frac{l.d\pi}{2}$ (§. 141. Zus.) $= l.r\pi$.

Zusatz 5. Da auch jenes △ wieder gleich ist einem Kreise, dessen Peripherie des Dreyecks Grundseite und dessen Halbmesser ϱ des Dreyecks Höhe ist, d. i. einem Kreise, dessen Flächenraum $= \varrho^2\pi$: so ist auch $\varrho^2\pi = l.r\pi$, oder $\varrho^2 = l.r$; und $l : \varrho = \varrho : r$; d. i. (Vergl. §. 169. Zus. 3.).

Zusatz 6. Hier ist also für die senkrechten Kegel $S : s = LP : lp$ oder $= LD : ld$ ꝛc.

Anmerkung.

Wollte man beyläufig die Seitenfläche des schiefen Kegels berechnen: so müßte man die Peripherie der Kreisfläche in soviele Bogen theilen, daß man ohne merklichen Fehler jeden für eine gerade Linie halten, und folglich jene Seitenfläche so berechnen könnte, wie die einer Pyramide, die soviel Dreyecke zur Oberfläche hat, als Bogen angenommen wurden.

§. 172. Lehrsatz. **Zwey Pyramiden sind kongruent, wenn sie eine kongruente Grund- und Seitenfläche und den eingeschlossenen Flächenwinkel gleich haben.**

Beweis. Wegen der Kongruenz von zwey Seitenflächen kongruiren die Spitzen der beyden Pyramiden und wegen der Kongruenz der Grundflächen sind ihre gleichnamigen Seiten gleich und die Ecken kongruent. Da nun durch die Kongruenz der 2 Seitenflächen und den gleichen eingeschlossenen Winkel zugleich der Abstand jeder Ecke

von

von der Spitze bestimmt, von der Spitze zur Ecke aber nur eine gerade Linie möglich ist; so sind alle Seiten der Seitenflächen, folglich auch alle Seitenflächen selbst wechselseitig gleich, also die Pyramiden kongruent.

Zusatz. Da durch die Neigung der Axe des Kegels zur Grundfläche, die Neigung seiner ganzen Seitenfläche zu dieser bestimmt ist: so sind auch 2 Kegel kongruent, wenn sie eine gleiche Grundfläche und gleiche Axe mit einerley Neigung gegen jene haben.

§. 173. Lehrsatz. Wenn eine Pyramide oder ein Kegel mit der Grundfläche parallel geschnitten wird: so ist die Durchschnittsfigur ähnlich der Grundfläche, d. i. beym Kegel ein Kreis.

Beweis. 1) Die angezeigte Aehnlichkeit erhellt aus §. 158. 2) Die parallelen Durchschnittsebenen EiFE, APBA (fig. 210.) werden von Ebenen DCB, DCP geschnitten, folglich wieder nach §. 158. DC : Dc = CF : cF = CP : ci... Aber CB = CP folglich auch cF = ci.. Da man dieß von allen Linien, die man in dem parallelen Durchschnitt EiFE an die konische Oberfläche ziehen mag, beweisen kann: so ist die Durchschnittsfigur um c ein Kreis.

Zusatz. Also bey Pyramiden z. B. fig. 208. BCD : bcd $= BC^2 : bc^2 = AB^2 : Ab^2 = AE^2 : Ae^2$. Beym Kegel sind die Durchschnitte auch wie $BC^2 : cF^2$, daher die Kreise um C, c auch wie $DC^2 : Dc^2$.

§. 174. Aufgabe. Die Oberfläche eines geraden abgekürzten Kegels zu finden (fig. 210.).

Auf-

Auflösung. Es sey $AC = r$; $Ec = \varrho$; $AE = e$; das fehlende Theil der ganzen Seite, nämlich $DE = x$, folglich $DA = x + e$; $AG = r - \varrho$. Nun ist $r - \varrho : e = \varrho : x$, und $r - \varrho : e = r : x + e$ (wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke), folglich $x = \frac{e\varrho}{r - \varrho}$; $x + e = \frac{er}{r - \varrho}$. Aber des ganzen Kegels Oberfläche $= r\pi . (x + e)$ §. 171. Zus. 4.) $= \frac{r^2 e}{r - \varrho} \pi$ und des abgeschnittenen $\varrho \pi x = \frac{\varrho^2 e}{r - \varrho} \pi$: also ist des abgekürzten Kegels konische Oberfläche $= \frac{r^2 - \varrho^2}{r - \varrho} . e\pi = (r + \varrho)\, e\pi$ d. i. einem Trapez gleich, dessen Höhe $= e$ der Seite des abgekürzten Kegels, und dessen parallele Seiten $2 r \pi$ und $2 \varrho \pi$ der Grundflächen Peripherien sind.

Zusatz. Also ist die konische Oberfläche des Stumpfes gleich dem Produkte aus der Seite AE in die halbe Summe der Peripherien seiner 2 parallelen Grenzebenen (§. 137. 4).

IV.

Von der Kugel.

§. 175. Erkl. Der geometrische Körper, dessen Oberfläche überal von einem Punkte C (fig. 214. 1te) gleichweit absteht, ist eine Kugel (Sphaera, globus). Der Punkt C, heißt Mittelpunkt, AC Halbmesser, AB Durchmesser, die ganze Oberfläche Kugelfläche. Eine ebene Figur, welche die Kugel in

zwey

zwey Theile theilt, heißt Kugelschnitt (sectio conica), die Theile heißen Kugelabschnitte, dergleichen einen fig. 215., wie fig. 216. einen Kugelausschnitt, vorstellt.

Zusatz 1. Man denkt sich die Kugel dadurch entstehen, daß man sich den Halbkreis AMB (circulus genitor) um den fixen Durchmesser AB (axis sphaerae) bewegt vorstellt.

Zusatz 2. Daher sind alle Kugeln und Kugelflächen von gleichen Halb- oder Durchmessern kongruent.

Zusatz 3. Denkt man sich mit der auf die Axe AB senkrecht gezogenen CM parallel de, fg.. in generirendem Halbkreise gezogen: so leuchtet ein, daß diese Linien Kreise beschreiben, deren Peripherien alle in der Kugelfläche liegen, und welche (Parallelkreise, circuli sphaerae minores) um so größer werden, je näher diese generirenden Linien dem Mittelpunkte zu liegen, daß folglich der mit CM, und so jeder mit dem Halbmesser der Kugel beschriebene Kreis unter allen andern ein größter Kugelkreis sey.

Zusatz 4. Daß eines solchen größten Kreises Fläche die Kugel in 2 gleiche Theile (Hemisphaeria) theile, erhellt so: Wäre z. B. der untere Abschnitt MBK > KAM; so müßte sich eine andere schneidende parallele Kreisfläche denken lassen, die einen Theil von dem grösseren Abschnitte MBK so abschnitte, daß dann der Rest = KAM würde. Der Halbmesser eines solchen Kugelschnitts würde demnach unter C gegen B zu fallen, folglich er selbst < CM und seine Kreisfläche kleiner seyn, als

als die zu CM gehörige, daher auch der Abschnitt, worein B fällt, nothwendig < KAM.

Zusatz 5. Die Mittelpunkte jener Parallelkreise liegen alle in der angenommenen Axe AB, indem diese ihre Durchmesser halbirt, deren Theilungspunkte folglich die Mittelpunkte der kleineren Kreise sind. So ist Nd = de, indem in den △△ NCd, Cde, NC = Ce und der Kathetus Cd = Cd.

Zusatz 6. Stellt man sich die Kugelfläche in unendlich viele gleiche (geradlinige) Dreyecke getheilt vor, und von jeder Ecke gerade Linien nach C gezogen: so besteht die Kugel aus unendlich vielen (dreyeckigen) Pyramiden, deren gemeinsame Spitze in C ist, welche folglich alle gleich sind.

Also ist die Kugel auch gleich einer einzigen Pyramide, deren Höhe der Halbmesser der Kugel und deren Grundfläche die Kugelfläche ist. Daher ist auch die Kugel so groß, als ein Kegel, der den Halbmesser der Kugel zur Höhe, und die Kugelfläche zur Grundfläche hat.

Zusatz 7. Steht AB fig. 214. 2te auf dem Kreise EBFHE senkrecht; so steht sowohl A als B von allen Punkten der Kreislinie gleich weit ab. Denn D = ADG = R, ED = DG, DA gemeinschaftlich, folglich in den gleichen △△ ADE, ADG auch AE = AG. Eben so ist △ EBD = BGD, daher BE = BG. Nun sind die Punkte E, G willkührlich gewählt, also ꝛc.

§. 176. Lehrsatz. Die Kugelfläche (F) gleicht vier größten Kreisen, oder $F = 4r^2\pi = d^2\pi$.

Be-

Beweis. Man ziehe 1) die Parallelkreise FI, LN (fig. 217.); auf diese steht die Axe AB senkrecht, und geht durch die Mittelpunkte G, M (§. 175. Zus. 5.). Man ziehe ferner NH || MG: so ist HM ein Rechteck, also

$$NH = MG, \text{ und } MNH = NHG = NHI = R.$$

2) Man ziehe auf den Halbmesser CN senkrecht NK; von der verlängerten GI in K begrenzt: so ist

$$HNK + HNC = R = MNC + HNC,$$

daher HNK = MNC, also △ CMN ∾ △ HKN, also

$$MN : NC = NH : NK = MG : NK \;(^1).$$

Setzt man daher die Peripherie des Kreises LMN = p und die des Kreises ADBEA = P; so ist, weil p : P = MN : CN (§. 121. Zus. 2.), auch p : P = MG : NK.

Daher p . NK = P . MG; d. i. das Rechteck aus der Peripherie des kleineren Kreises (in eine gerade Linie ausgedehnt) und der geraden Linie NK ist gleich rc.

3) Denkt man sich nun MG als den unendlich vielsten Theil von AG: so ist MG ein Punkt (§. 19.), folglich auch NI, NK, also NI = NK und MN = GI, daher NI || MG. Also ist

4) Der Theil der Kugel zwischen diesen Parallelkreisen ein senkrechter Cylinder, dessen Seitenfläche die zwischen diesen Kreisen liegende Kugelfläche ist, daher ist diese = p. NI, oder = p. NK (§. 169. Zus. 3.) folglich auch = P. MG, d. i. der zwischen 2 unendlich nahen Kreisen enthaltene Theil der Kugeloberfläche ist gleich einem Rechtecke, dessen Grundseite der Abstand jener Kreise MG und dessen Höhe die Peripherie eines größten Kugelkreises ist.

Stellt

5) Stellt man sich nun AG in unendlich viele Theile getheilt vor, und durch jeden Theilungspunkt einen Parallelkreis gelegt; so besteht die Kugeloberfläche über den Kreis FGI aus den Seitenflächen lauter solcher Cylindern, wie unter 4), folglich aus einem einzigen Rechtecke, dessen Höhe P und dessen Grundseite ist die Summe aller jener unendlich vielen Theilen von AG d. i. AG selbst. Also ist dieser Theil der Kugelfläche noch einmal so groß, als ein △, dessen Grundseite P und dessen Höhe AG ist.

6) Nehmen wir daher AC als die Höhe an: so ist die halbe Kugelfläche über den größten Kreis DCE (§. 175. Zus. 4.) noch einmal so groß, als ein △, dessen Grundlinie P, und dessen Höhe der Halbmesser AC ist, d. i. zweymal so groß, als ein größter Kreis. Also rc.

Zusatz 1. Daher ist auch die Kugel so groß als ein Kegel, dessen Grundfläche = 4 größten Kreisen, und dessen Höhe = AC (§. 175. Zus. 6.); oder 2mal so groß, als ein Kegel, der einen größten Kugelkreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat.

Zusatz 2. Also ist die Kugel auch $\frac{2}{3}$ eines um sie geschriebenen, oder solchen Cylinders, welcher einen größten Kreis zur Grundfläche, und den Durchmesser der Kugel zur Höhe hat; d. i. $S = \frac{2}{3}$ C (§. 71. Zus. 3.). *)

Zus.

*) „Quanti (sagt Taquet) hoc theorema fecerit Archimedes (den man auch für den Erfinder unsers Lehrsatzes hält), argumento est, quod tumulo suo sphaeram cylindro inscriptam apponi voluerit."

Zus. 3. Zwey Kugeln verhalten sich also wie die Würfel ihrer Durchmesser (§. 169. Zus. 2.), d. i. $S : s = D^3 : d^3$.

Zusatz 4. Denkt man sich die Cylinder um Kugeln geschrieben: so verhalten sie sich auch wie ihrer Höhen Würfel, d. i. $C : c = A^3 : a^3$, daher auch 2 Kegel $K : k = A^3 : a^3$; aber $K : k = B.A : b.a$ (§. 171. Zus. 3.) $= A^3 : a^3$; folglich $B : b = A^2 : a^2$, d. i. die Grundflächen zweyer Würfel verhalten sich wie die Quadrate ihrer Entfernungen von den Spitzen der Kegeln.

Zusatz 5. Die Kugelflächen verhalten sich zueinander wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der Kugeln, was aus dem Satze selbst folgt.

Zusatz 6. Aus dem Beweise des Lehrsatzes erhellt, daß man, um eines sphärischen Segments Fläche, welche der um AB (fig. 214.) bewegte Bogen Ak erzeugt, zu erhalten, die Peripherie eines größten Kugel-Kreises multipliziren müsse mit der Höhe Af dieses Segments. (Ein Aehnliches von der Zone).

Dritter Abschnitt.

Von der Ausmessung der Körper. *)

---

§. 177. Aufgabe. Einen Würfel zu messen.

Auflösung. Man messe eine Seite desselben und erhebe die gefundene Zahl, welche anzeigt, wie oft das als

*) Man sehe meine Ziffernrechnung S. 256. u. f.

als Einheit angenommne Maß in derselben enthalten ist, zum Würfel, oder kurz ausgedrückt, man kubire eine gemessene Seite.

Beweis. Es sey die Seite l des als Maß angenommenen Würfels w in der Seite L des auszumessenden W überhaupt n^{mal} enthalten, oder $L:l=n:1$; so ist, weil $W:w=L^3:l^3$ (§. 166. Zus. 2), auch $W:w=n^3:1$. d. i. $W=n^3w$.

Allgemeine Anmerkung.

Wie man bey diesem und den folgenden Körpern aus dem Inhalte wieder die Höhe oder die Grundfläche berechnen könne, ist von selbst klar.

§. 178. Aufgabe. Ein Prisma auszumessen.

Auflösung. Man multiplizire die Grundfläche des Prisma mit dessen Höhe.

Beweis. Des vorgegebenen Prisma P Höhe H sey $=nh$ d. i., das $n$fache der Höhe des zum Maß angenommenen Würfels w, und seine Grundfläche A sey eben so $=ra$: so ist

$$A:a=n:1$$
$$H:h=r:1$$

also $AH:ah=nr:1$, folglich auch $P:w=nr:1$. (§. 166. Zus. 1.), also $P=nr.w$.

Zusatz 1. Also findet man auch auf dieselbe Art den körperlichen Inhalt des Parallelepipedums und des Cylinders. Für den letztern C gilt, wenn d den Durchmesser seiner Grundfläche, e dessen Höhe und π die Lu-

dolph'sche Zahl bezeichnet, die Formel $C = \frac{d^2 e \pi}{4}$ oder $C = er^2\pi$ (§. 143.).

Zusatz 2. Ist daher der Durchmesser des Cylinders c durch δ und dessen Höhe durch η bezeichnet: so ist $C : c = d^2 e : \delta^2 \eta$, oder wenn $d = \delta$, $= e : \eta$ ꝛc.

Zusatz 3. Hat man einen hohlen Cylinder (eine cylindrische Röhre) auszumessen, so ist, wenn R den Halbmesser des ganzen Cylinders, r den der Höhlung und e die Höhe bezeichnet, der Inhalt der Röhre $= eR^2\pi - er^2\pi = e[(R+r)(R-r)]\pi$.

Beyspiel. Den körperlichen Inhalt einer bleyernen Röhre, welche 8‴ im Metall dick, 1′ im Lichten weit, und 20′ lang ist, findet man = 6,431 Kubik Fuß beynahe.

Zusatz 4. Nimmt man einen Cylinder c, wie im Zus. 2., als Einheit ganz auf die Art, wie bey der Ausmessung des Prisma und Würfels an, und setzt, daß des Cylinders C Höhe $e = n\eta$ und $d = m\delta$ (wo m und n ganze und gebrochene Zahlen bedeuten können,) sey: so ist $C : c = m^2 d^2 . n\eta : \delta^2\eta = m^2 n : 1$, also $C = m^2 nc$ d. i. der mit c, als Einheit, zu messende Cylinder enthält den Cylinder c m^2 $n$mal. Setzte man $e = \eta$, daher $n = 1$: so ist $C = m^2 c$. Sollte daher C noch einmal so groß als c, d. i. $C = 2c$ seyn, so müßte $m^2 = 2$ und $m = \sqrt{2}$ oder $d = \delta\sqrt{2}$ genommen werden.

§. 179. Aufgabe. Einen cylindrischen Visirstab (virgam cylindrometricam s. pithrometricam) zu verfertigen.

Auf-

Auflösung. Um weniger für ein kleines Gefäß zu irren, berechnet man den Inhalt eines großen genau würfligen Gefäßes, das einige Eimer Wasser hält, und sucht, wieviel von diesem Inhalte z. B. auf ein Gefäß, welches z. B. 1 oder 2 Maß oder $\frac{1}{8}$ Eimer u. s. w. Flüssigkeit hält, kömmt. Man kennt demnach den Inhalt eines cylindrischen Gefäßes c, dessen Durchmesser δ und Höhe η seyn soll, z. B. in Cubikzollen, nämlich $c = \frac{\delta^2 \eta}{4}\pi$. Die Höhe η mißt man nun genau an einem solchen cylindrischen Eichgefäße c, für welches $\frac{\delta^2 \eta}{4}\pi$ berechnet ist, und findet daraus den Durchmesser $\delta = \sqrt{\frac{4c}{\eta\pi}}$, den man dann auch mit dem unmittelbar am Eichmaße zu messenden Durchmesser vergleichen kann.

Die Höhe η trägt man nun auf der einen Seite eines langen Parallelepipedums auf, so oft sichs thun läßt, theilt etwa auch noch jede Länge η in 4te Theile, und schreibt zu jedem η die Zahlen nach der Ordnung 1, 2, 3.. So erhält man die Längenseite des Visirstabes (latus arithmeticum).

Man multiplizirt dann den berechneten Durchmesser δ der Ordnung nach mit $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{4}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{\frac{5}{4}}$ ... $\sqrt{2}$ u. s. w, $\sqrt{\frac{9}{4}}$ ... $\sqrt{3}$ u. s. w. Die so gefundenen Breiten trägt man auf die andere Seite des Parallelepipedums und schreibt nach der Ordnung hinzu $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ u. s. w. So hat man auch des Visirstabes Flächenseite (latus geometricum).

Diese Breiten kann man auch durch unmittelbare Zeichnung sich auf folgende Art verschaffen: Es sey bz

(fig. 218.) das cylindrische Gefäß c (eine Eichmaß, Kanne oder ein Eimer), dessen Durchmesser ab, oder den berechneten Durchmesser δ trage man auf der auf ab senkrecht errichteten Linie auf, so, daß $b1 = ab$; mache ferner $b2 =$ der Hypotenuse $a1$ und $b3 = a2$ u. s. w. Diese Linie bg mit ihren Abtheilungen verzeichne man auf der einen Seite des Maßstabes: so hat man, wie oben die Flächenseite desselben.

Es ist offenbar, daß hier, wie oben, die erste Breite $b1 = \delta\sqrt{1} = ab = \delta$, die zweyte $b2 = a1 = \sqrt{(ab^2 + b1^2)} = \sqrt{(\delta^2 + \delta^2)} = \delta\sqrt{2}$ u. s. w. sey. Bey der letzten Methode ist aber das m im Zus. 4. des §. 178. der Ausdruck für ganze Zahlen.

Gebrauch. Man messe des vorgegebenen Cylinders Höhe oder Tiefe e mit der Längenseite, und bemerke die beygeschriebene Zahl, z. B. $9\frac{3}{4}$; mit der Flächenseite messe man den Durchmesser d, die nebenstehende Zahl sey $12\frac{1}{2}$. Beyde miteinander multiplizirt, geben $121\frac{7}{8}$ Maß für den Inhalt des Gefäßes. Denn hier ist $e = 9\frac{3}{4}\eta$; $d = \delta\sqrt{12\frac{1}{2}}$, folglich $n = 9\frac{3}{4}$ und $m^2 = 12\frac{1}{2}$, daher $C = 9\frac{3}{4} \cdot 12\frac{1}{2}\,c$.

Eben so ist klar, daß, wenn $e = \eta$ oder die Höhe cx (fig. 219.) des zu messenden Cylinders dx gleich az wäre, und die Flächenseite an cd gelegt z. B. b2 abschnitte, der Cylinder dx das Doppelte der Flüßigkeit von bz hielte u. s. w.

Anmerkung.

Den Inhalt eines Faßes fig. 220. zu messen, giebt Lambert in seinen Beyträgen Th. 1. 2te Abtheilung, S. 339. folgende Vorschrift: Man mißt BP mit der Längenseite; die Böden CD, MN, XZ aber mit der Flächenseite: so ist der Inhalt des Faßes D = BP. $(\frac{2}{3} XZ + \frac{CD + MN}{6})$. Wäre aber CD = MN, so wird $\frac{CD + MN}{6} = \frac{1}{3} CD$.

Beyspiel. Ist BP = $9\frac{3}{4}$, XZ = $29\frac{1}{4}$, DC = $21\frac{1}{2}$; MN = $21\frac{1}{4}$ gefunden: so ist D = $259\frac{12}{32}$ solcher Maße, für deren eine man δ als Durchmesser berechnete. Nach Lamberts Behauptung kann an dieser Zahl kaum $1\frac{1}{50}$ fehlen.

Nach der gemeinen Methode, wo man nur $\frac{DC + ZX}{2}$ mit BP multiplizirt, erhält man $247\frac{13}{32}$ solcher Maße; wobey CD = MN gesetzt wird, in welchem Falle man nach Lamberts Methode 260 M. findet.

Sind aber die beyden Böden ungleich; so muß man nach derselben gemeinen Methode von DC und MN das Mittel und von diesem und ZX wieder das Mittel nehmen, und dieses zuletzt mit BP multiplziren.

Wenn man bedenkt, daß Lambert jene Regel (welche man auch für den Fall, wo NM = CD, kurz so ausdrücken kann: „Man nimmt vom größeren Cylinder $\frac{2}{3}$ und vom kleineren $\frac{1}{3}$") wissenschaftlich, d. i. durch genaue Berechnung der Größe der Krümmung der Faß-

bau-

dauben (man vergleiche auch den 3ten Theil seiner Beyträge S. 30.) entwickelte, und sie an verschiedenen Fässern erprobt fand (§. 46. der zit. Abh.); so sieht man nicht, wie Huberti (m. s. dessen Geom. pag. 123.) von seiner Methode: „Man ziehe von XZ ab DC und addire die halbe Differenz zu DC, welche Summe man mit BP multiplizirt" behaupten konnte, diese Regel sey an Teutschlands Fässern erprobt. Daß nämlich diese Methode jene obige von Lambert verworfene gemeine Methode sey, von der er behauptet, sie könne auf 12 Maß schon um 1 fehlen, sieht man deutlich, wenn man nach Huberti setzt $D = DC + \frac{XZ - DC}{2}$, welches $\frac{XZ + DC}{2}$.

§. 180. Aufgabe. Eine Pyramide zu messen.

Auflösung. Ist ihre Höhe H, ihre Grundfläche B: so ist ihr körperlicher Inhalt $P = \frac{1}{3}$ HB (§. 171.)

Beyspiel. Nach Pocock ist der großen Pyramide von Memphis Grundfläche 693′ ins Gevierte, die Höhe 481′, also P = 480249 . 481 = 76999923 K. F.

Zusatz 1. Also des Kegels Inhalt $K = \frac{1}{3} \frac{d^2 e \pi}{4}$ (§. 178. Zus. 1.) $= \frac{1}{3} er^2\pi$.

Nach §. 143. Zus. 1. wäre K = 0,026526 . . . e. p^2. Ist z. B. p = 12′; e = 6 : so ist K = 22,918464 Kubikfuß.

§. 181. Aufgabe. Eine abgekürzte Pyramide

BC

BC (fig. 208.), oder einen Obelisk bis an die aufgesetzte Spitze, zu berechnen.

Auflösung. Berechnet man 1) eine Grundfläche z. B. bcd: so kann man die andere durch Rechnung finden, indem $bc^2 : BC^2 = bcd : BCD$ (§. 173. mit §. 134.)

2) Denkt man sich nun z. B. mit bB || cH gezogen: so ist $CH : BC = Hc : BA = Bb : BA = Ee : EA$. Nun ist $CH = BC - BH = BC - bc$, also als meßbar bekannt, wie Ee, folglich findet man die ganze Höhe $EA = H$ aus $CH : BC = Ee : EA$. Aus dieser hat man 3) $eA = h$ die Höhe des fehlenden Stückes. Ist daher die Grundfläche der ganzen Pyramide $= B$, und $bcd = b$: so hat man 4) den Inhalt des Stumpfs $T = \frac{1}{3} BH - \frac{1}{3} bh$.

Zusatz. Setzt man, es verhalte sich $BC : bc = m : n$; so ist auch $BCD : bcd$, oder $B : b = m^2 : n^2$, also $b = \frac{n^2 B}{m^2}$; aber auch $m : n = H : h$, daher $m - n : m = H - h : H$, setzt man daher die Höhe des Stumpfs $H - h = \eta$, so ist $H = \frac{m\eta}{m-n}$ und $H - \eta = h = \frac{n\eta}{m-n}$. Also $T = \frac{1}{3} B . \frac{m\eta}{m-n} - \frac{1}{3} B . \frac{n^2}{m^2} . \frac{n\eta}{m-n} = \frac{1}{3} \eta B \left(\frac{m}{m-n} - \frac{n^2}{m^2} . \frac{n}{m-n} \right)$. Dieser lezte Faktor $= \frac{1}{m^2} . \frac{m^3 - n^3}{m - n}$ giebt bey wirklicher Division die Größe $\frac{1}{m^2} m^2 + mn + n^2 = \frac{1}{m^2} [(m+n)^2] - mn$, folglich $T = \frac{\eta B}{3m^2} [(m+n)^2 - mn]$.

Be-

Beyspiel. Der vatikanische Obelisk, den Fontana aufrichtete, soll (nach Leupold. Theat. Mach. §. 268.) 107,5, römische Palmen hoch, unten 12 oben 6 P. breit gewesen seyn, welches seinen Inhalt, ohne die Spitze, giebt 9030 kub. Palmen (indem hier $m = 2$, $n = 1$). Wie viel macht dieß rheinl. Kub. F.?

§ 182. Aufgabe. Einen abgekürzten geraden Kegel (fig. 210.) zu berechnen.

Auflösung. Macht man die Bezeichnung, wie im §. 174. und setzt $cC = h = EG$ und $CD = H$: so findet man auf ähnliche Art, wie im vorigen §, den Inhalt des abgekürzten Kegels $k = \frac{1}{3} . \frac{hr}{r - \varrho} . B - \frac{1}{3} \frac{h\varrho}{r - \varrho} . b$. Nun ist aber hier $B = r^2\pi$ und $b = \varrho^2\pi$, folglich wird, wie im vorigen Zus., hier $k = \frac{1}{3} h\pi [(r + \varrho)^2 - \varrho]$ erhalten.

Beyspiel. Dieser Formel bedient man sich mit Vortheil zur Berechnung des kubischen Inhaltes von Baustämmen, welche gewöhnlich, wenigstens nach oben zu, die Gestalt eines abgekürzten Kegels haben. Z. B. es sey $h = 69'$, sein unterer Umfang $= 7' \, 8\frac{1}{2}''$, der obere 12, 6 Zoll; so ist nach §. 141 Zus. $r = 0,159 . 7,85$; $\varrho = 0,159 . 1,26$, woraus man dann der Formel gemäß $k = 133,66$ Kub. F. findet.

§. 183. Aufgabe. Den Inhalt (s) der Kugel zu finden, wenn der Halb- oder Durchmesser derselben gegeben ist.

Auflösung. Hier ist $s = \frac{1}{6} d^2\pi = \frac{4^3\pi}{3}$ (§. 176.

Zus.

Zus. 2. mit §. 178. Zus. 1.); oder man multiplizirt die Kugelfläche mit dem 3ten Theil des Halbmessers oder dem 6ten des Durchmessers. An $\frac{1}{6}\pi = 0,52359\ldots$ hat man eine beständige Zahl.

Zusatz 1. Also $s : \delta^3 = \frac{\pi}{6} : 1 = 0,523\ldots : 1 = 157 : 300$ beynahe.

Zusatz 2. Man sieht daher, wie man sowohl aus dem gegebenen Durchmesser der Kugel, anders, als vorhin, ihren Inhalt s, als auch auf ähnliche Art, wie oben §. 143. Zus. 3., den Durchmesser der Kugel aus dem gegebenen Inhalte (s) finden könne; nämlich $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} . s} = 1,242\ldots \sqrt[3]{s}$.

Zusatz 3. Da 1,242 .. eine beständige Zahl ist: so ist klar, daß sich die Durchmesser wie die Cubikwurzeln aus dem Inhalte der Kugeln verhalten. So ist der Durchmesser einer noch einmal so großen Kugel $= \sqrt[3]{2} = 1,25992\ldots$ oder der Durchmesser der letzten Kugel von 50 Kug., deren jede noch einmal so groß ist, als die vorhergehende, $= \sqrt[3]{2^{49}}$.

Anmerkung.

Dieser Aufgabe mit Zus. 1. bedient man sich 1) in der Astronomie, um aus dem gefundenen Durchmesser eines Planeten dessen Inhalt zu finden, und die Planeten miteinander zu vergleichen; wenn z. B. der Durchmesser der Erde sich verhält zum Durchmesser der Sonne = 1 : 100; so verhält sich die Erde zur Sonne = 1 : 1000000. — 2) Dient die Aufg. mit Zus. 3. zur Berechnuug des Kaliberstabes in der Artillerie.

§. 184.

§. 184. Aufgabe. I. Den Kugelausschnitt (fig. 216.), II. den Kugelabschnitt auszumessen.

Auflösung v. I. Es ist offenbar, daß man den Kugelausschnitt als eine einzige Pyramide betrachten könne, deren Grundfläche ist der Theil LGIFHL der Kugelfläche, und deren Höhe der Halbmesser HC der Kugel ist, woraus die Aufl. erhellt.

Aufl. v. II. Der Abschnitt ist gleich dem Ausschnitte CIGHFL weniger dem Kegel CIGHF.

Anmerkung 1.

Zur Ausmessung irregulärer Körper bedient man sich mit Vortheil eines Gefäßes oder genau viereckigen Kastens, dessen Inhalt man berechnet. In diesen legt man den Körper und füllt den übrigen Raum mit Wasser, Sand u. d. gl. aus, oder nur bis zu einer Höhe, daß der Körper ganz bedeckt ist u. s. w.

Anmerkung 2.

Man nennt geometrische Körper, z. B. 2 Prismen, ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Flächen sind, und wenn ihre Höhen den homologen Seiten der Grundflächen proportional sind. Diese homologen Seiten, wie die Höhen, nennt man die Wurzelseiten der Körper.

Daß nun 2 Prismen, wie jede 2 Pyramiden, wenn sie ähnlich, in triplizirtem Verhältniße ihrer Wurzelseiten sind, erhellt leicht vermöge §. 165. Zus. 1. 2c.

Vier=

Staatliche Bibliothek Bamberg

Vierter Abschnitt.

Von der Kubatur der Körper und ihrer Verwandlung ineinander.

§. 185. Erkl. Einen Körper kubiren, heißt einen Würfel oder die Seite eines Würfels finden, dessen körperlicher Inhalt dem des Körpers gleich ist. Dieses geschieht entweder geometrisch, durch Konstruktion, oder arithmetisch, durch Rechnung.

§. 186. Aufgabe. 1. Körper, welche aus Kreisumwälzungen entsprungen gedacht werden, 2. auch Prismen und Pyramiden arithmetisch zu kubiren.

Auflösung. Für 1. und 2. gilt im Allgemeinen: Man suche jedes Körpers Inhalt nach obigen Vorschriften des 3ten Abschn. in Kubikruthen, u. s. w. Die Cubikwurzel aus dieser Zahl ist, wie von selbst erhellt, die Seite eines gleich großen Würfels.

Für 1. gelten daher besonders folgende Formeln: nämlich diese Seite l ist

in Ansehung des Cylinders $= \sqrt[3]{\frac{d^2 e\pi}{4}} = 0{,}9222.\sqrt[3]{d^2 e}$;

— — des Kegels $= \sqrt[3]{\frac{d^2 e\pi}{12}} = 0{,}6397\sqrt[3]{d^2 e}$;

— — der Kugel $= d\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = d.\,0{,}805995977$.

Anmerkung.

Hieraus erhellt, daß die Kubatur dieser Körper eben so wenig vollkommen ist, als die Kreisquadratur.

Aber

Aber auch die andern geometrischen Körper auf eine allgemeine geometrische Art zu kubiren, ist nicht nach Grundsätzen der niedern Geometrie möglich. Hieher gehören vorzüglich die vielen Bemühungen der Alten, die Aufgabe einen Würfel oder die Seite eines Würfels zu finden, welche einen andern geometrischen Körper, den Würfel selbst nicht ausgenommen, n^{mal} enthält — durch geometrische Konstruktionen zu lösen. Es ist klar, daß, wenn man eines Würfels Seite doppelt, dreyfach.. oder ihre Hälfte, oder dritten Theil u. s. w. nimmt, man die Seite eines Würfels habe, welcher den vorgegebenen 8, 27, . . . oder $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}^{mal}$ enthält. Allein dieß ist nur ein spezieller Fall, wo jenes n eine wahre Cubikzahl ist. — Unter diesen Aufgaben ist besonders das Delische Problem "die Seite eines doppelten Würfels zu finden" berühmt geworden. Wären jene Methoden, die wir in der Anmerk. 2. nach §. 130. angaben, ächt geometrisch; so lößte man auch jenes Delische Problem auf folgende ächt geometrische Art. Ist nämlich des gegebenen Würfels Seite l und die des Gesuchten L; so muß der Aufgabe gemäß $l^3 : L^3 = 1 : 2 = l : 2l$ seyn. Denn die Würfel w, W müssen seyn $= l^3 : L^3$ und zugleich auch $= 1 : 2$ (der Aufgabe zufolge). Sucht man nun zwischen l und 2l nach einer jener Methoden 2 mittlere Proportionallinien x, z: so daß ist $l : x : z : 2l$: so thut der auf der Seite x ($=$ L) konstruirte Würfel der Aufgabe Genüge. Denn (wenn ist $a : ae : ae^2 : ae^3$; so ist auch $a : ae^3 = a^3 : a^3 e^3$; folglich) $l : 2l = l^3 : x^3$ (L^3); also $w : W = l^3 : L^3 = 1 : 2$.

Arithmetisch lößt man diese, wie alle Aufgaben dieser Art, indem man den gefundenen Inhalt des Würfels u. d. gl. duplirt, und überhaupt in dem gegebenen Verhältniß verändert. Die Cubikwurzel aus dieser Zahl giebt dann die Seite des gesuchten Würfels u. d. g.

§. 187. Aufgabe. Einen geometrischen Körper A in einem andern B von gleichem Inhalte, aber von gegebener Höhe, oder Grundfläche . . . zu verwandeln.

Auflösung. Man bilde aus den Formeln, wodurch der Inhalt beyder Körper bestimmt ist, eine Gleichung, und entwickle hieraus die unbekannte Größe, die Grundfläche oder die Höhe.

Beyspiel. Statt eines Guerickschen Kugelrecipienten von 20'' im Durchmesser, will man einen Cylinder gleichen Inhaltes, aber von 12'' im Durchmesser haben: wie groß muß man dessen Höhe nehmen?

Hier ist, wenn D der Durchmesser des Rezipienten, d des Cylinders, e dessen Höhe, $\frac{D^3\pi}{6} = \frac{d^2 e\pi}{4}$, folglich $e = \frac{2D^3}{3d^2}$. ꝛc.

Verbesserungen.

Seite 12. Zeile 11. v. unten statt 1^5 lies 1s
— 22. Z. 8. v. u. st. fig. 25. l. 27.
— 42. Z. 7. v. u. st. eie l. seyn.
— 77. Z. 13. st. C l. Cm.
— 90. Z. letzte l. DE || AB, und $DE \wedge AB$.
— 96. Z. 6. v. u. st. 2r l. 21.
— 146. Z. 6. st. $\frac{r}{2} a =$ l. $a = \frac{r}{2} \cdot 2r\pi$.
— 180. Z. 14. st. Oberfl. l. runde Oberfl.
— 183. Z. 4. l. ABCDEF.

In meinem Lehrbuche der Buchstabenrechnung und niedern Algebra sind folgende Druckfehler zu tilgen:

S. 48. Z. 9. l. $+ a^{2n}$. — S. 49. Z. 5. st. oder l. aber. — S. 64. Z. 4. v. u. l. 10000. — S. 83 Z. 7. v. u. l. $(\gamma\zeta - \beta\delta)$ d. und Z. 10. l. $\gamma\zeta - \beta\delta$. — S. 95. Z. 17. st. erste l. r^{te}. — S. 101. Z. 15. nach „Gliedern" l. diese mitgerechnet. — S. 105. Z. 9. st. 64. l. 32. — S. 124. Z. 8. st. 0,21 … l. 0,20 … daher $S = 4{,}68 \ldots =$ l. 48030,9. — S. 125. Z. 12. l. $a = \left(\frac{b}{b+c}\right)^n S$, $S - \left(\frac{b}{b+c}\right)^n S$. — S. 126. Z. 13. v. u. l. $S = \left(\frac{b+c}{b}\right)^n a$ ꝛc. — S. 121. Z. 12. v. u. l. 4,9089 … und Z. 13. l. n. l. $\left(\frac{b+c}{b}\right)$. — S. 128. in II. l.: $l. \frac{b+c}{b}$. — S. 129. Z. 2. st. $\frac{b}{c}$ l. $\frac{c}{b}$

Fig. 1. à 23. Schoen's Geometrie Tab. I.

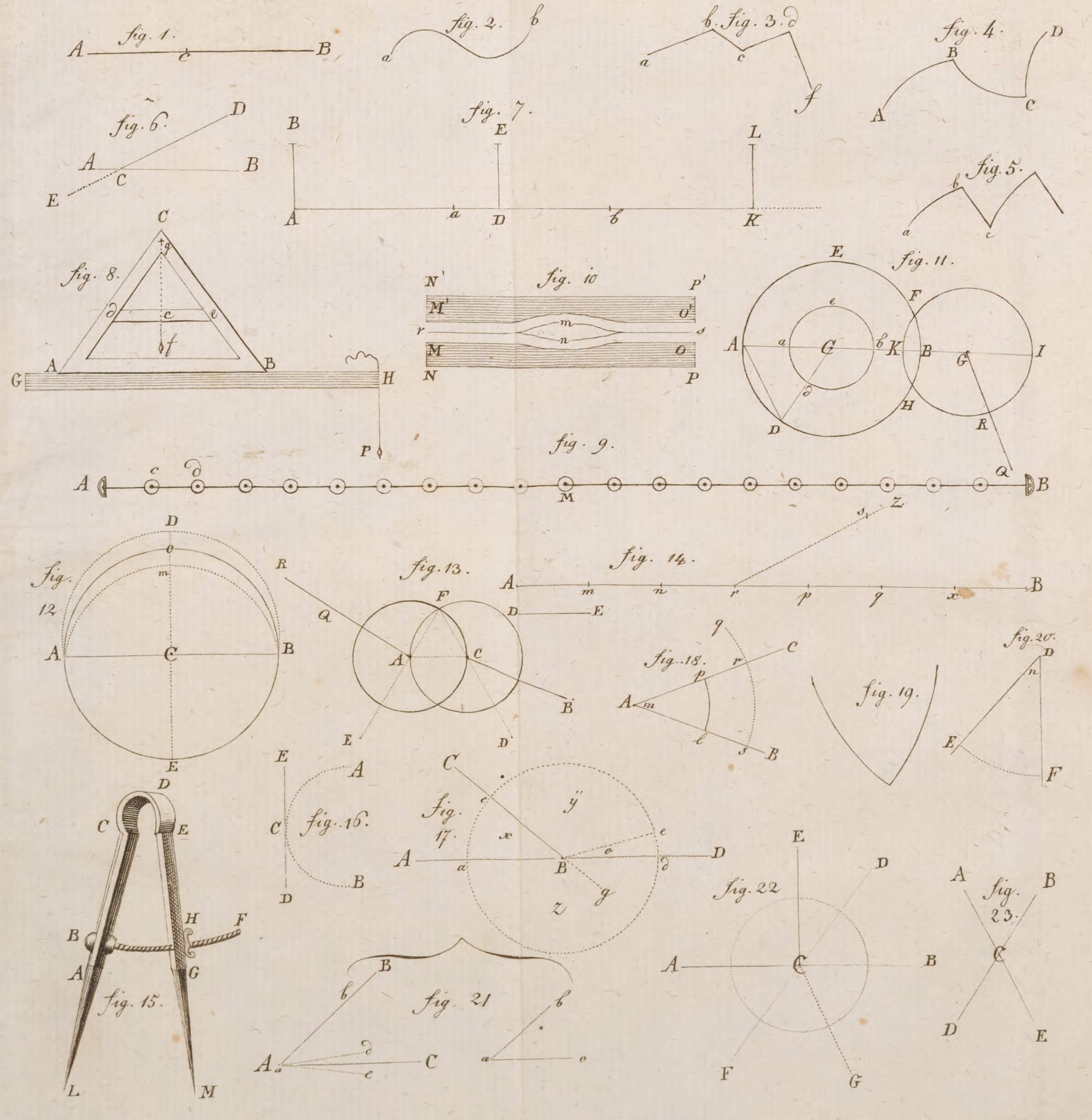


fig. 24.

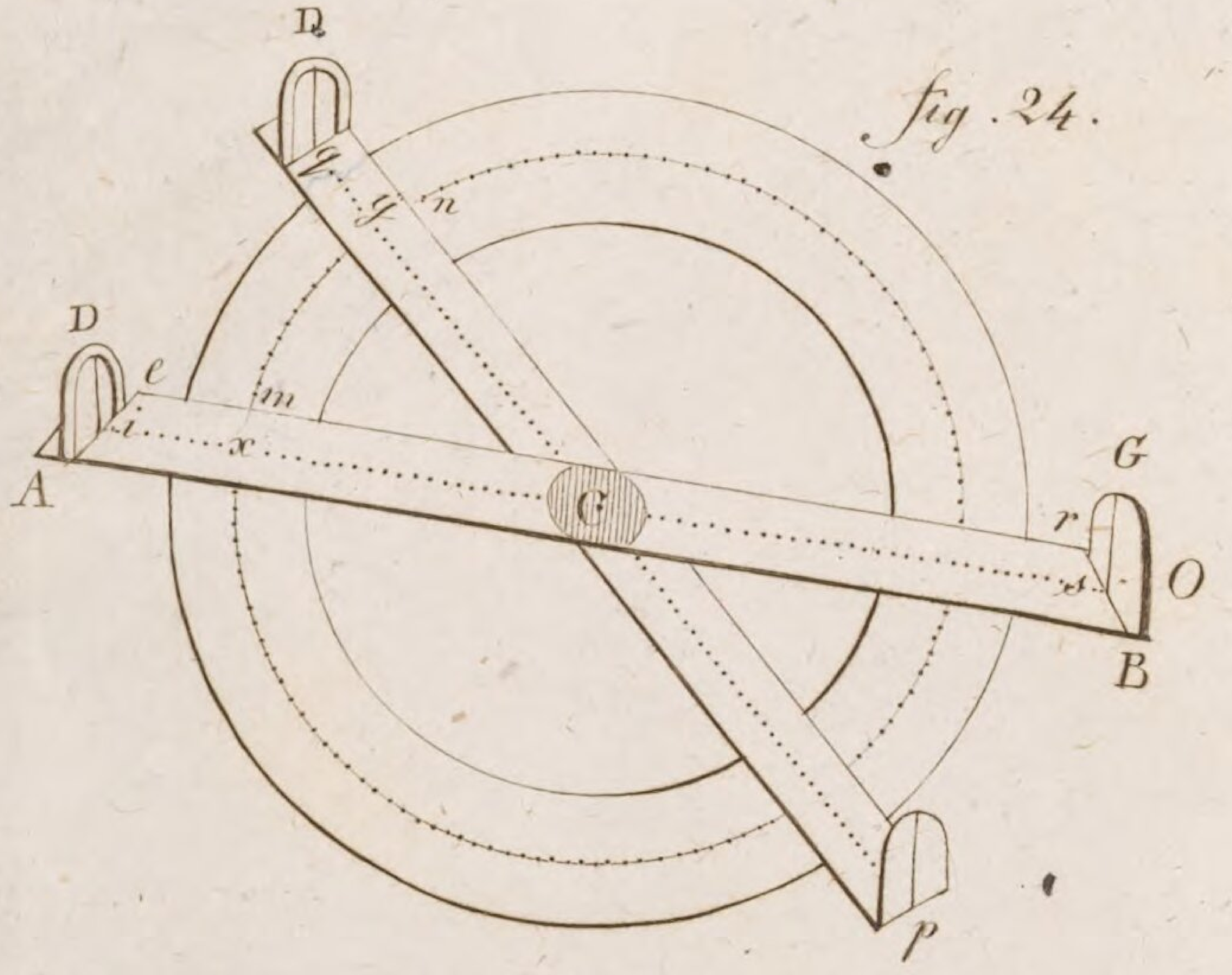


fig. 25.

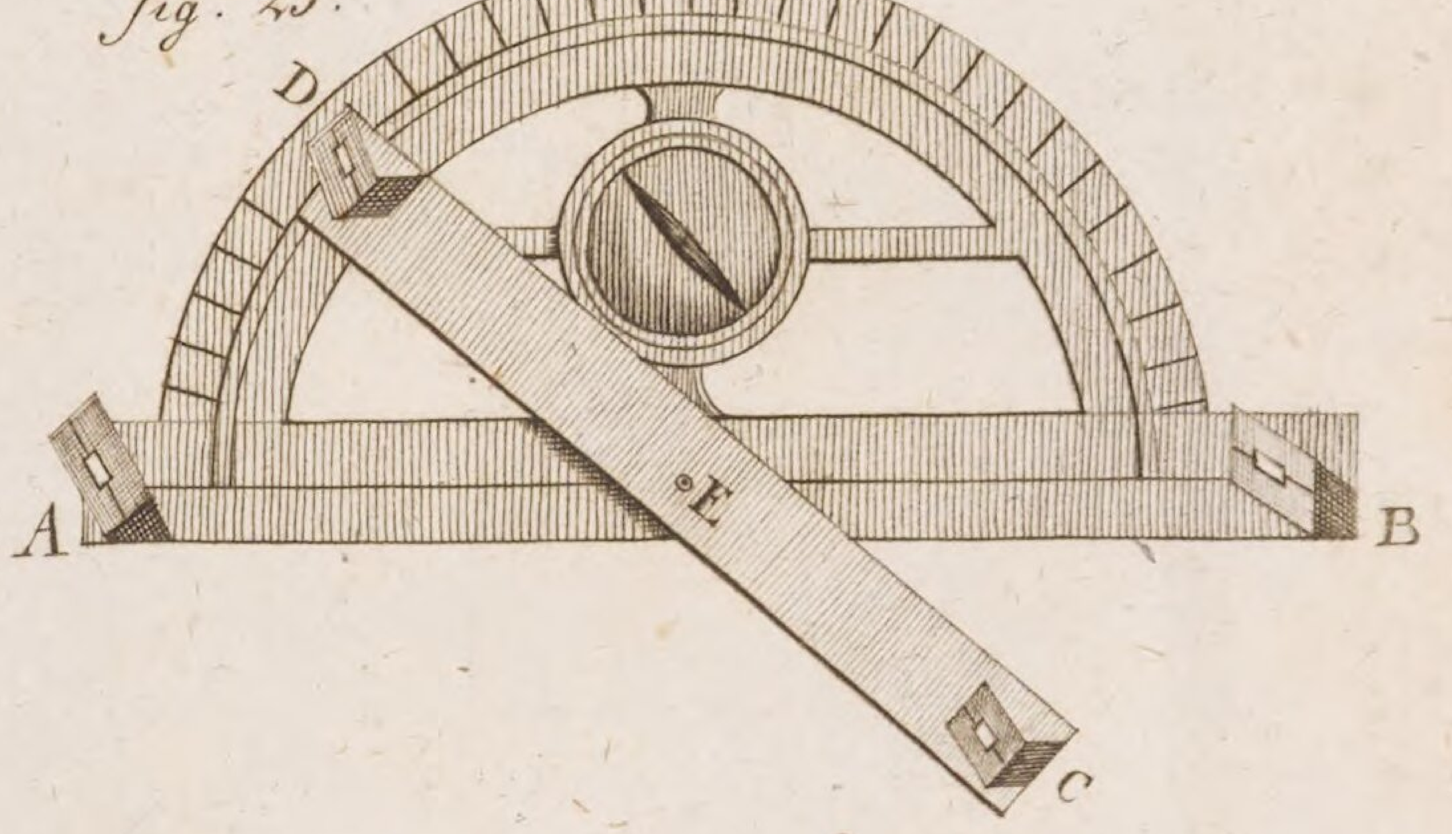


fig. 26.

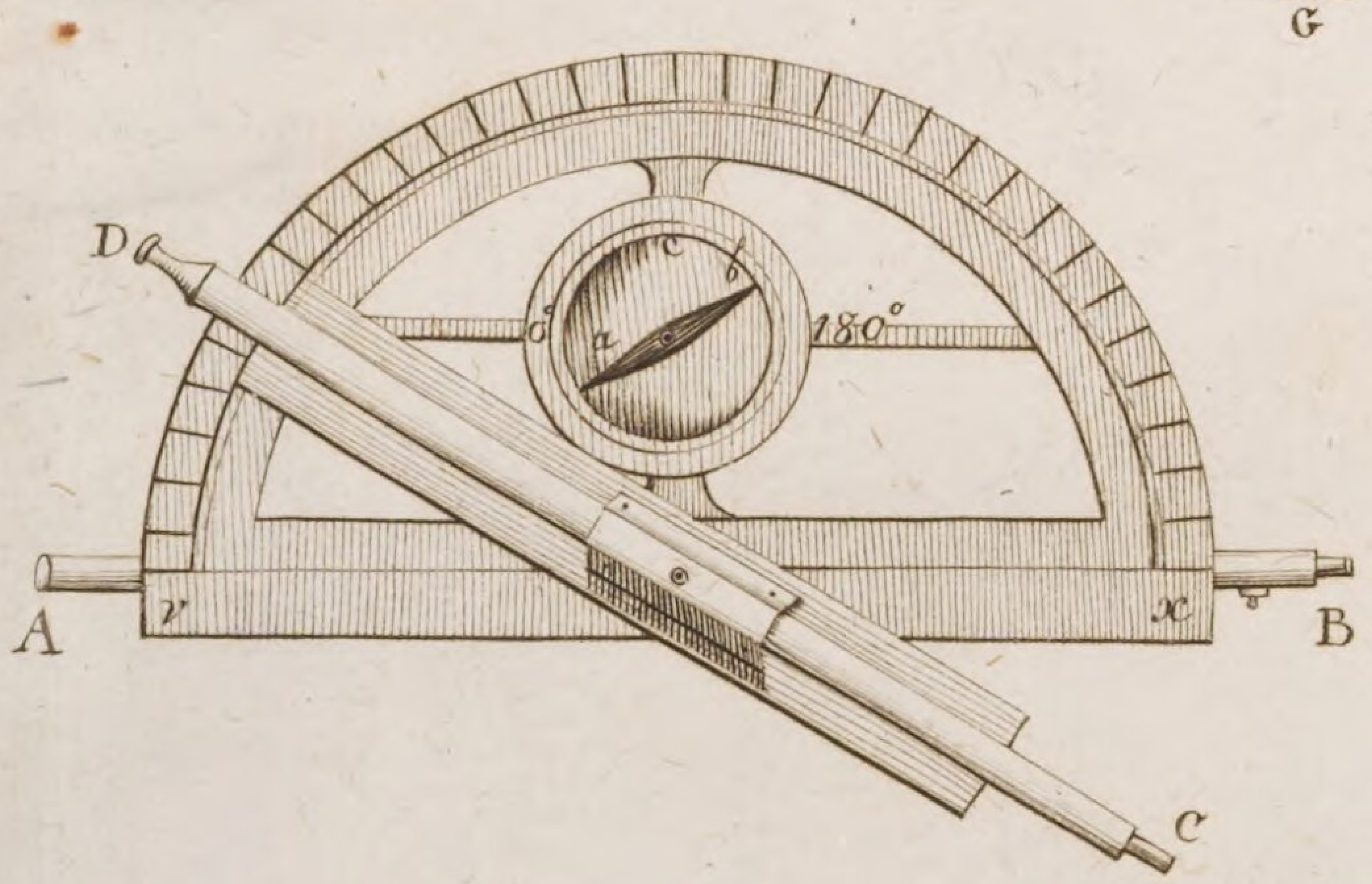


fig. 27.

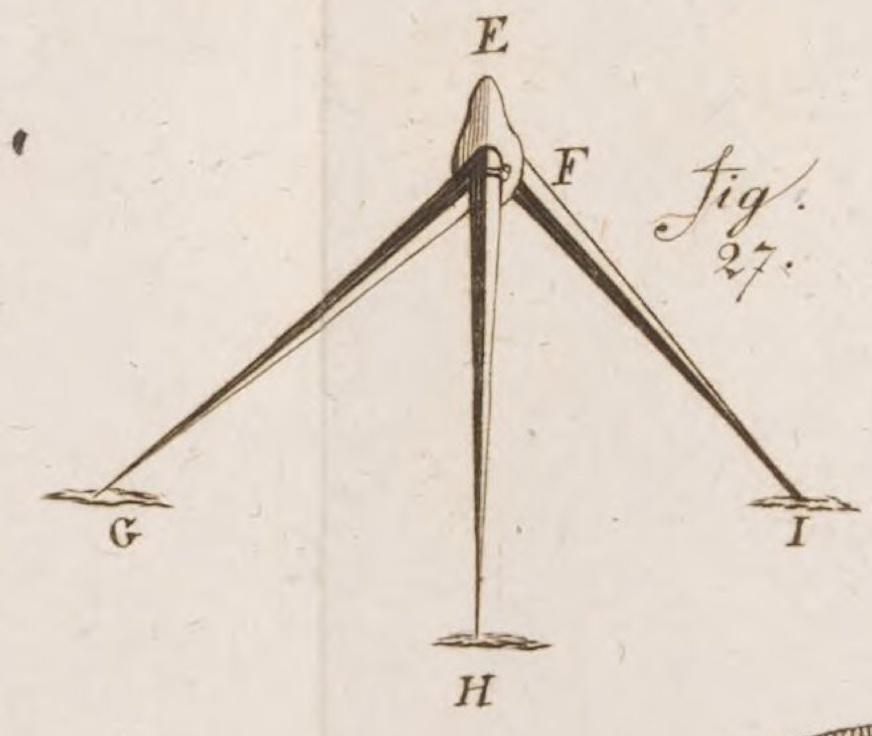


fig. 28.

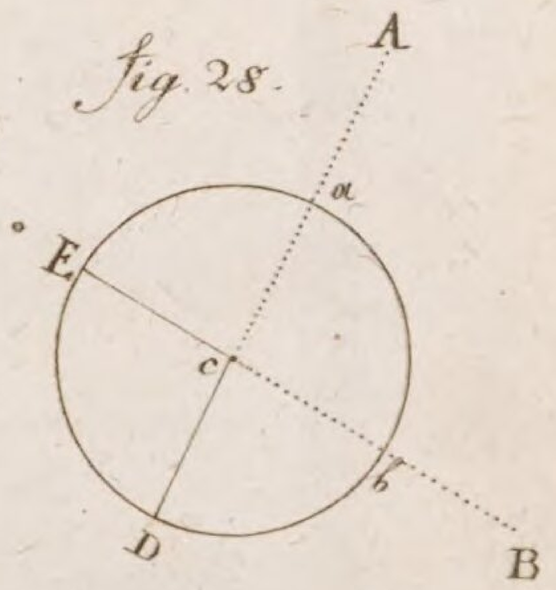


fig. 29.

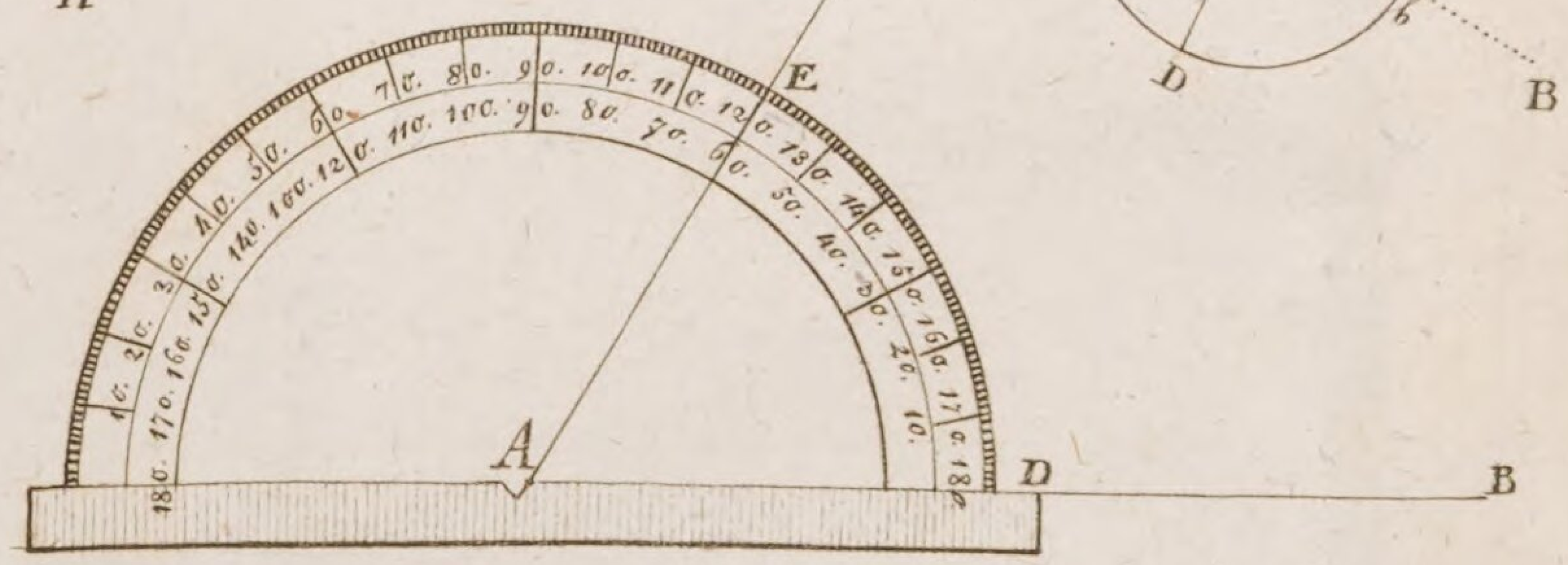


fig. 30.

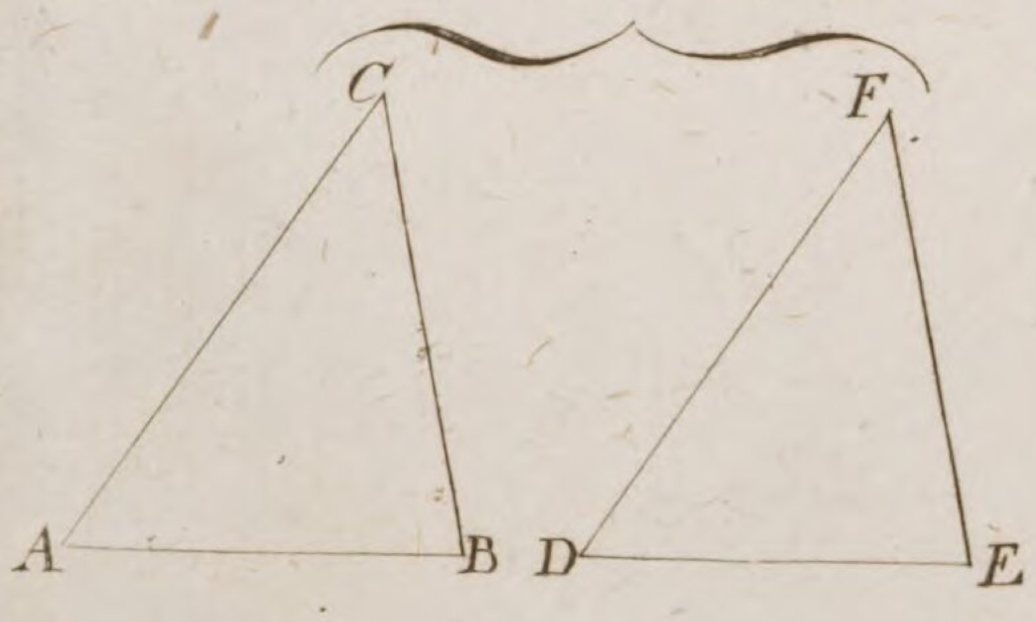


fig. 31.

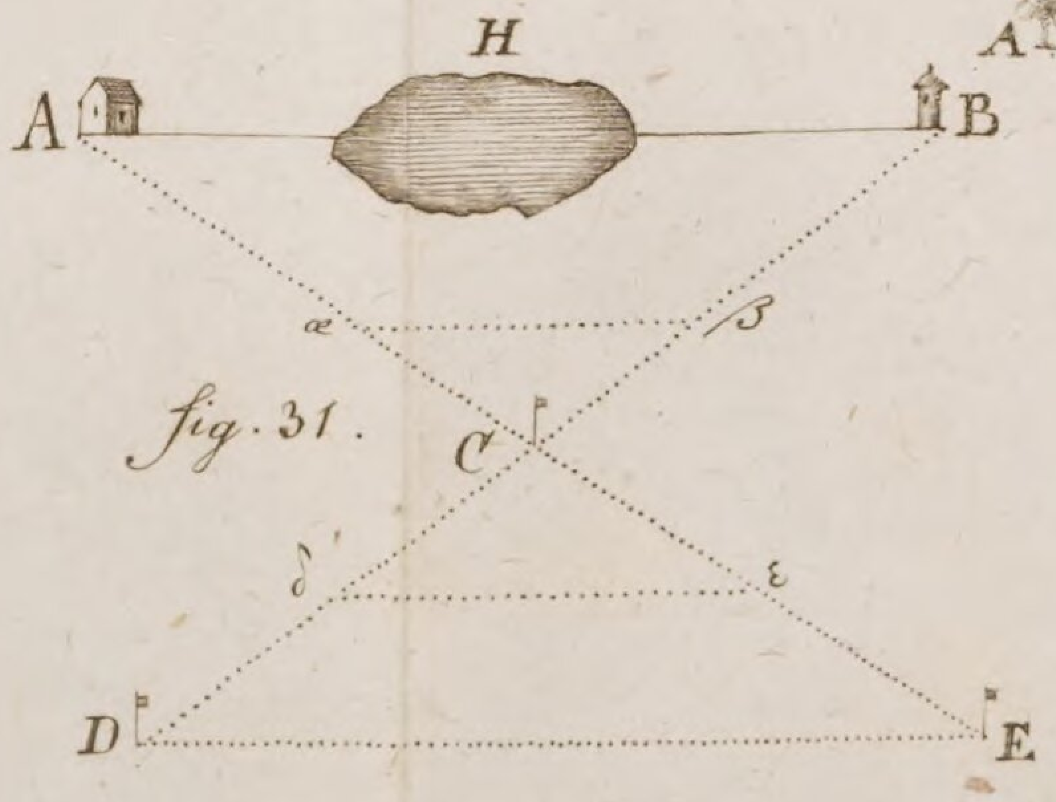


fig. 32.

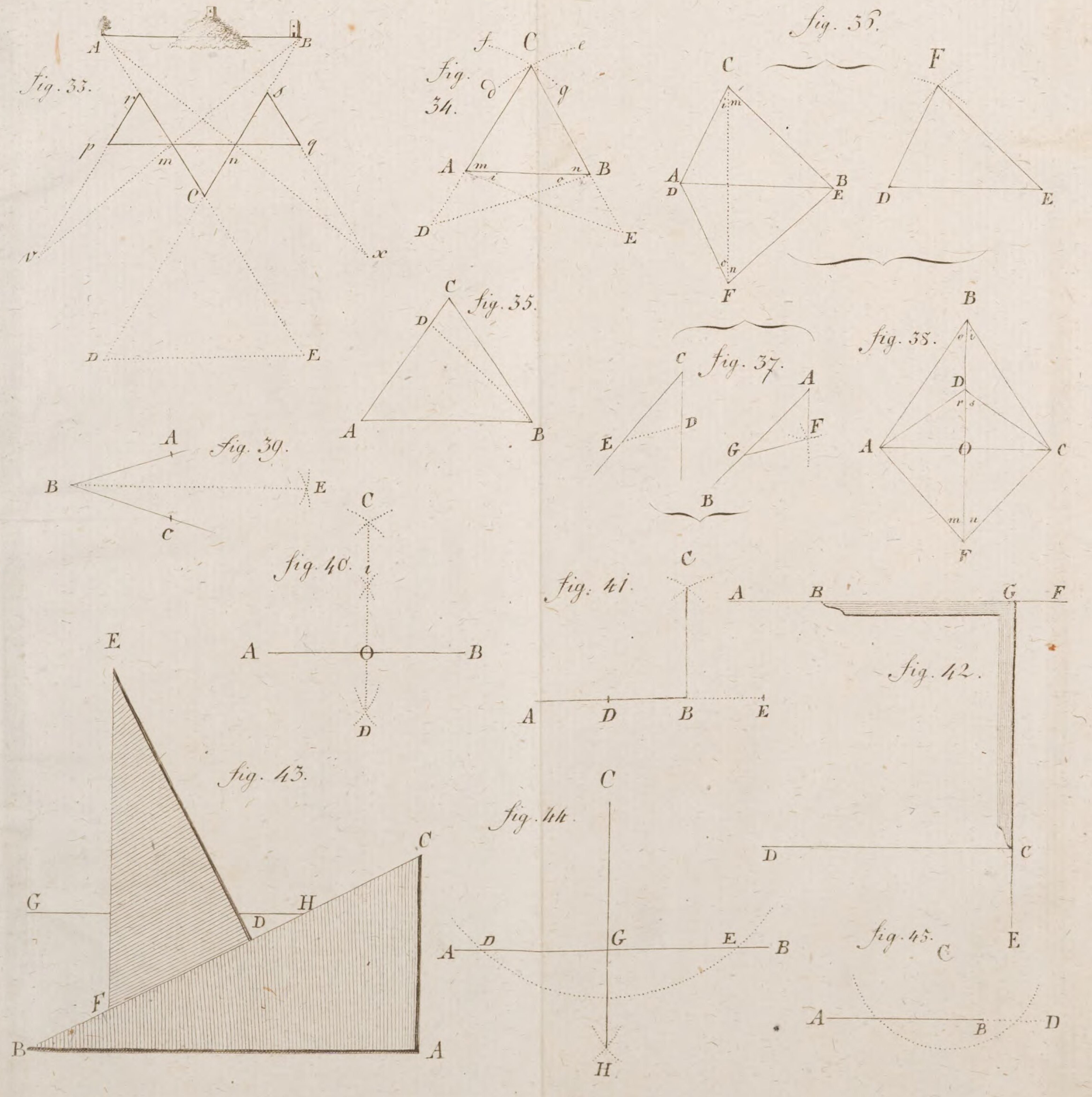
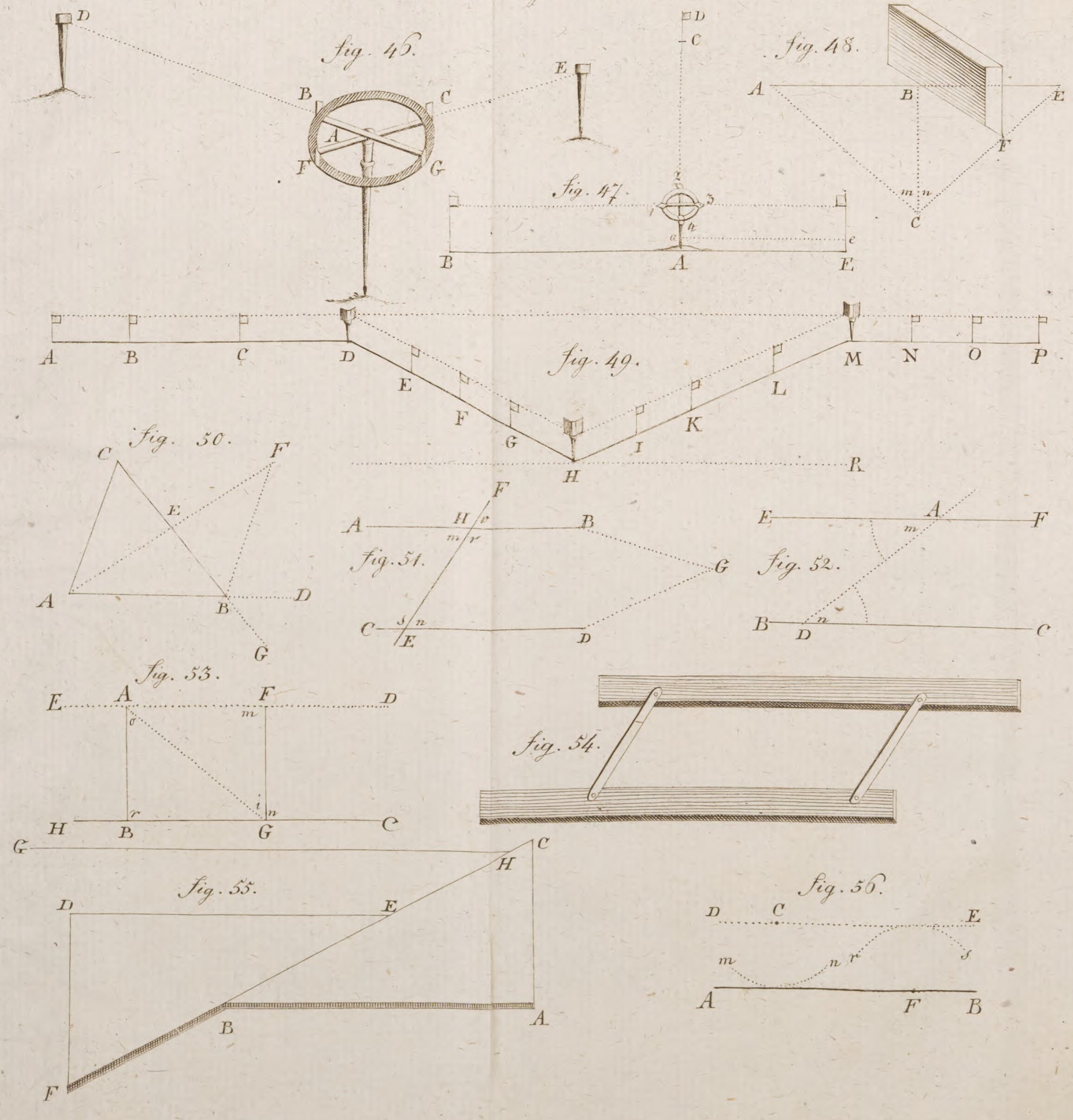


fig. 33.
Fig. 34.
fig. 35.
fig. 36.
fig. 37.
fig. 38.
fig. 39.
fig. 40.
fig. 41.
fig. 42.
fig. 43.
fig. 44.
fig. 45.

Fig. 45. a 56.

Schoen's Geometrie

Tab. IV.



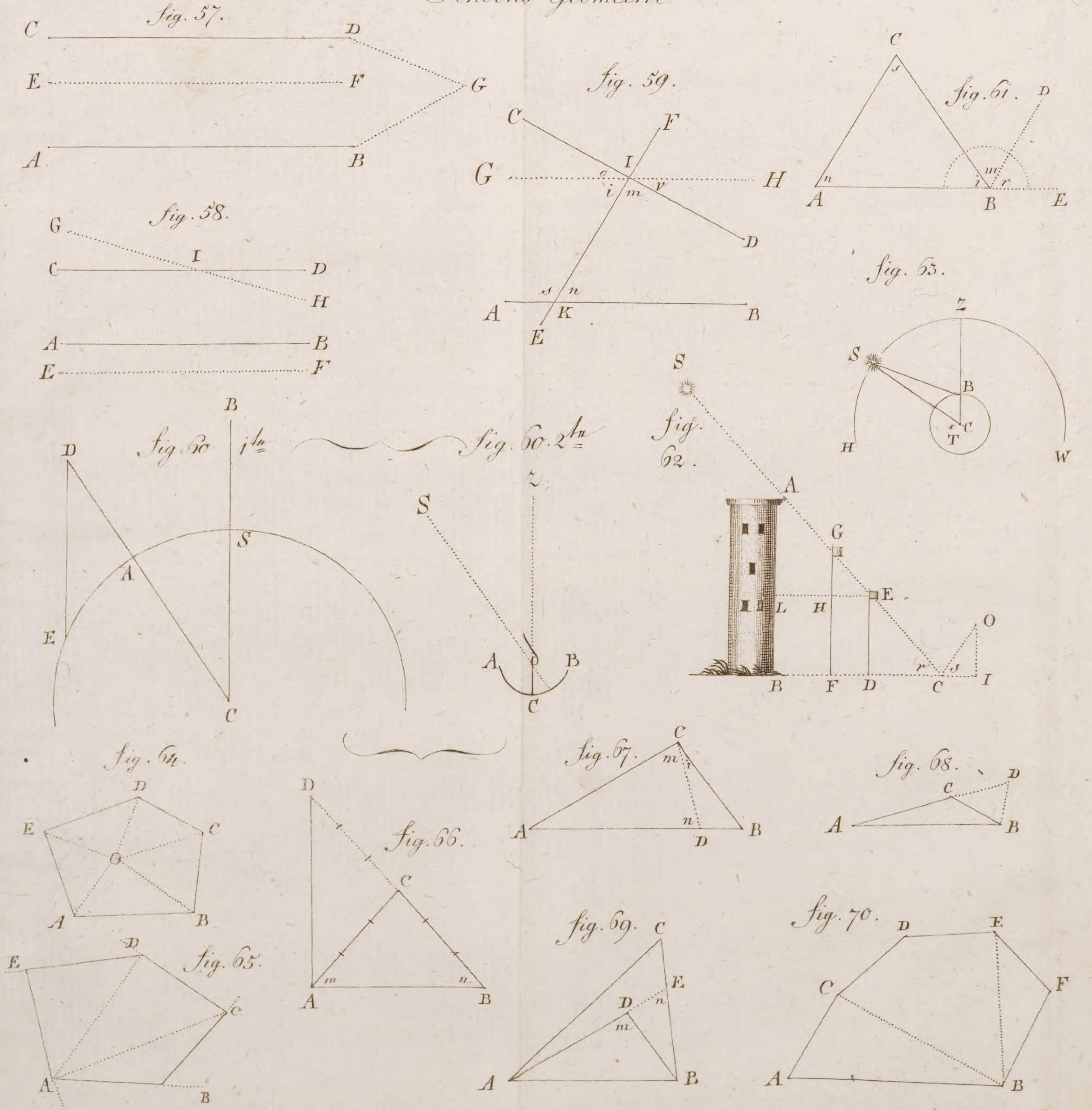


Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60. 1te
Fig. 60. 2te
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.

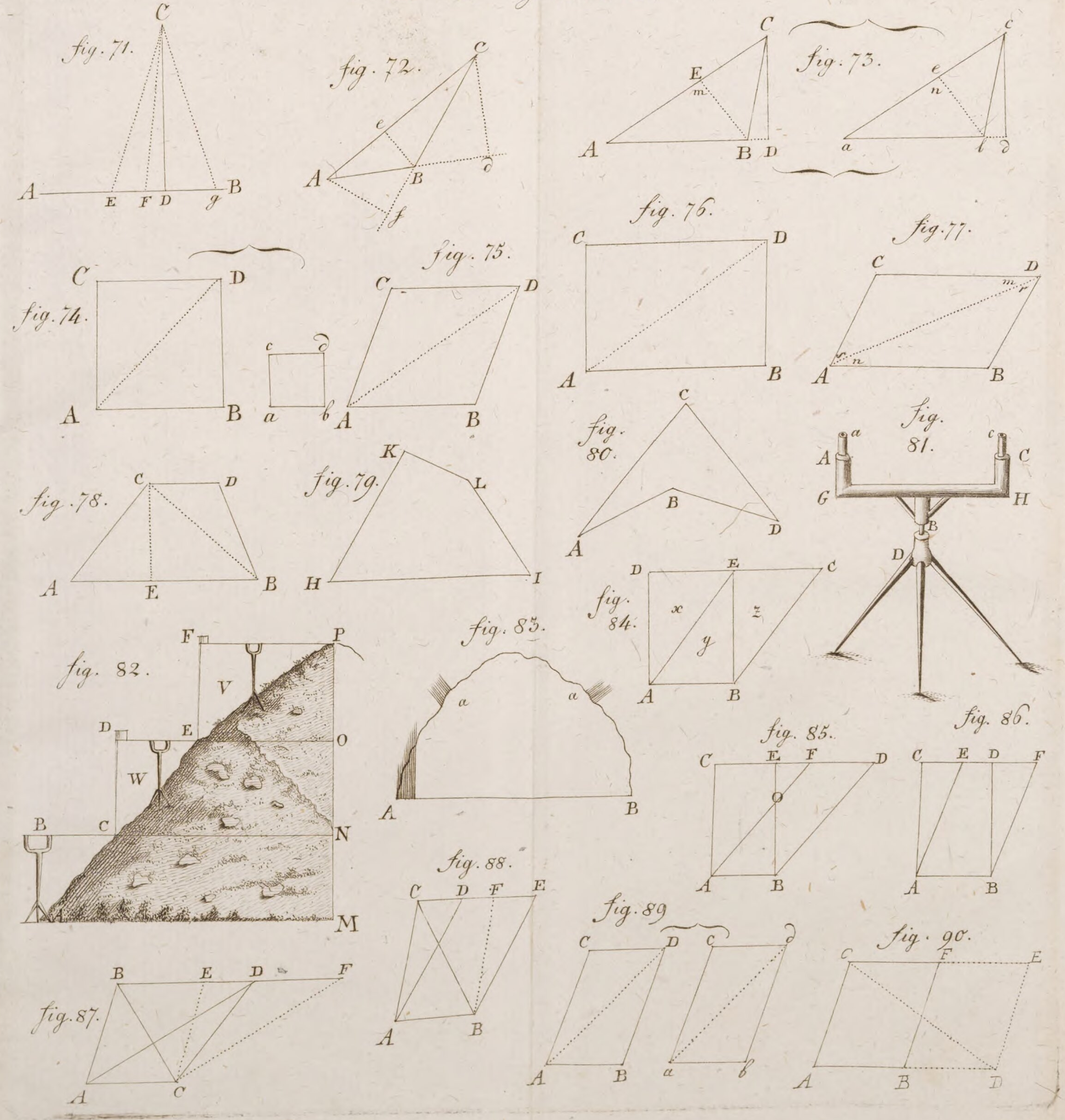


fig. 71.
fig. 72.
fig. 73.
fig. 74.
fig. 75.
fig. 76.
fig. 77.
fig. 78.
fig. 79.
fig. 80.
fig. 81.
fig. 82.
fig. 83.
fig. 84.
fig. 85.
fig. 86.
fig. 87.
fig. 88.
fig. 89
fig. 90.

Fig. 91.

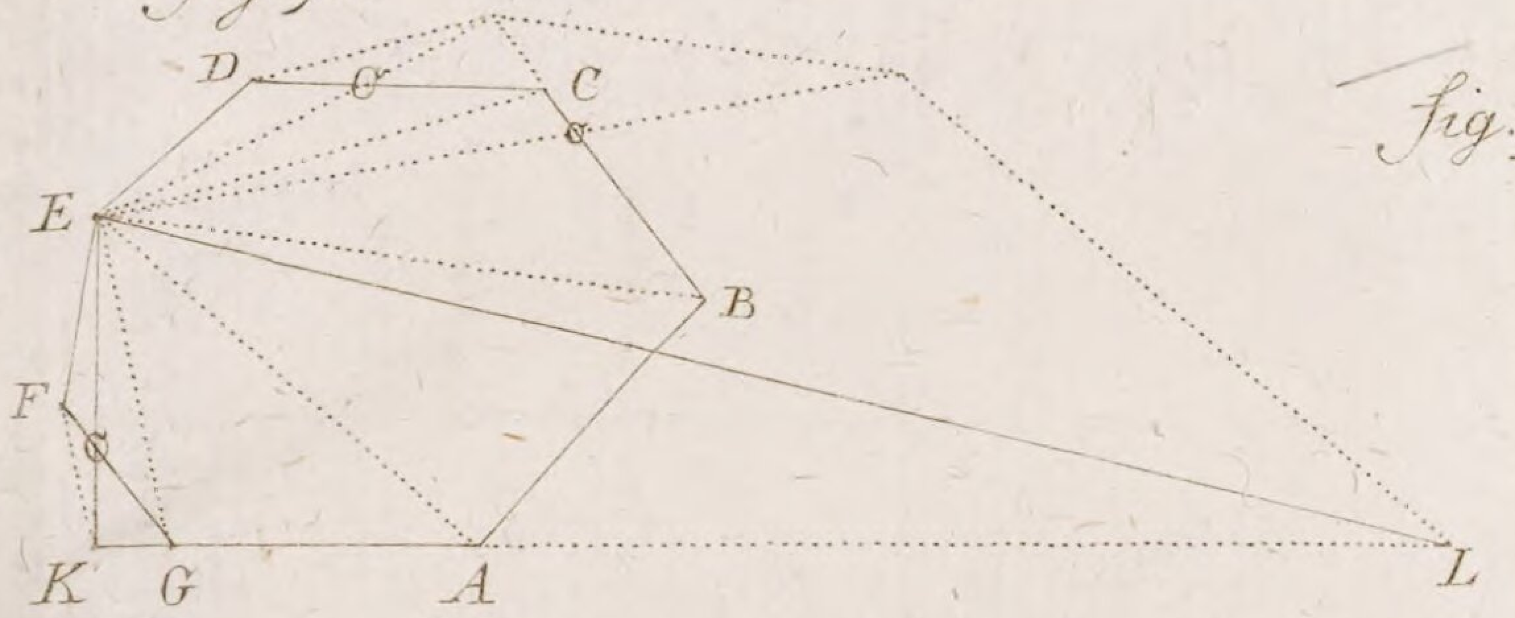


Fig. 92.

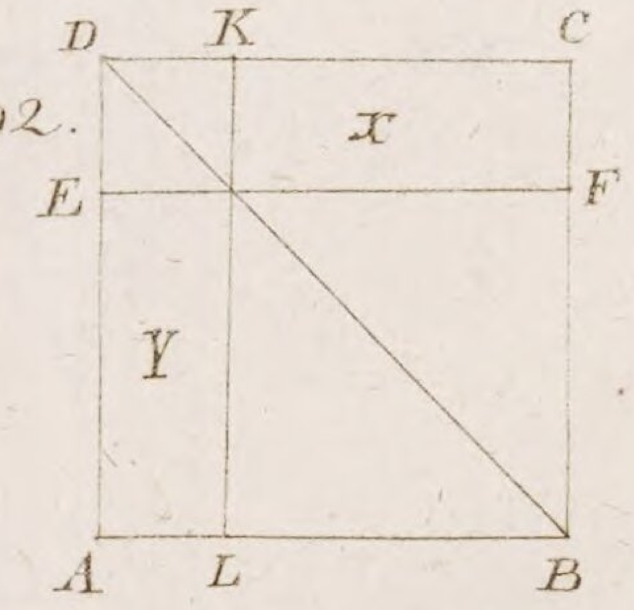


Fig. 94.

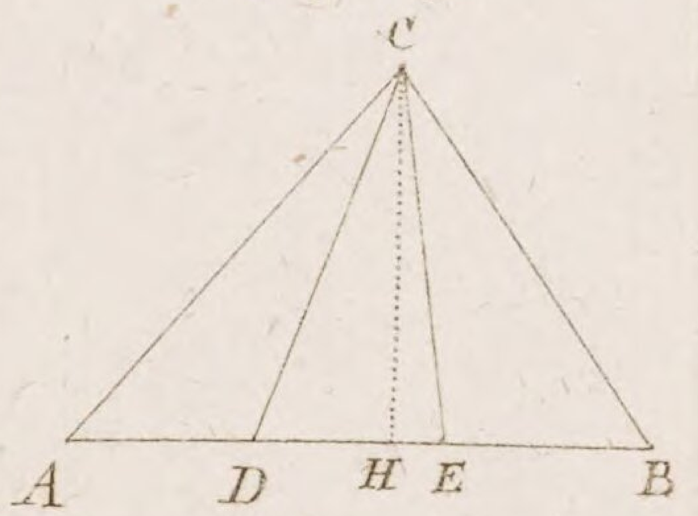


Fig. 93.

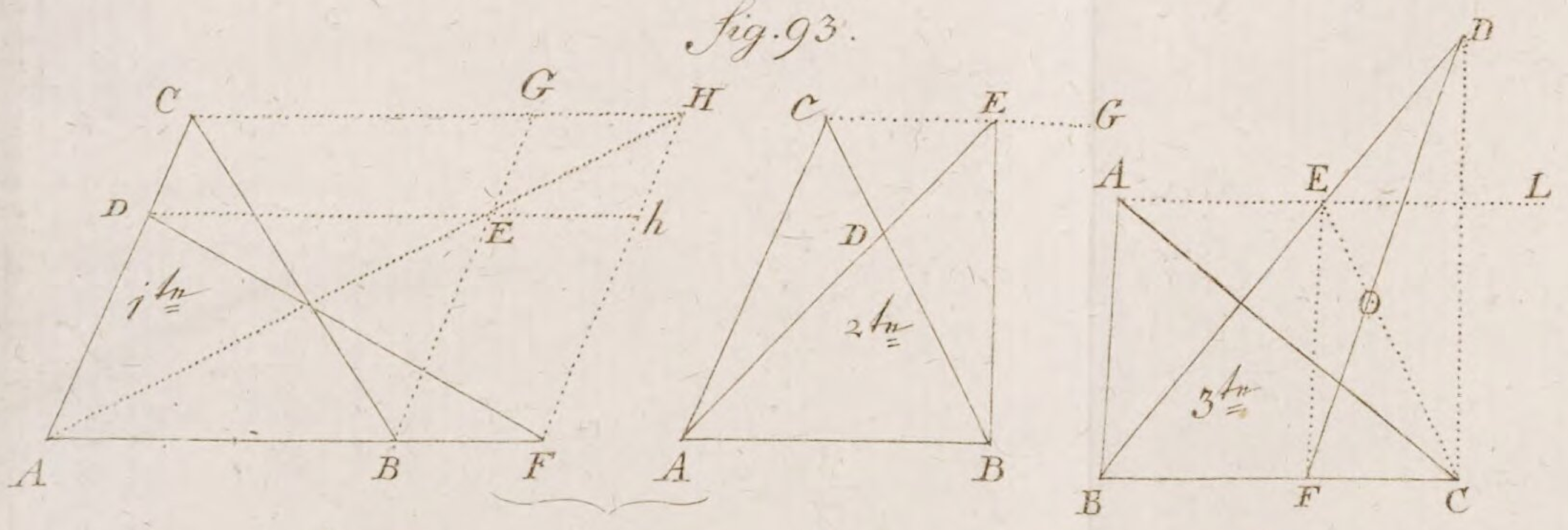


Fig. 95.

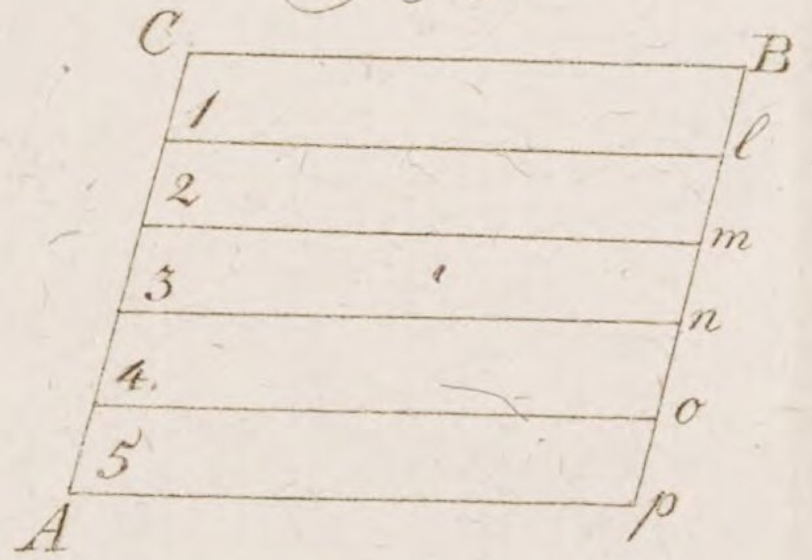


Fig. 97.

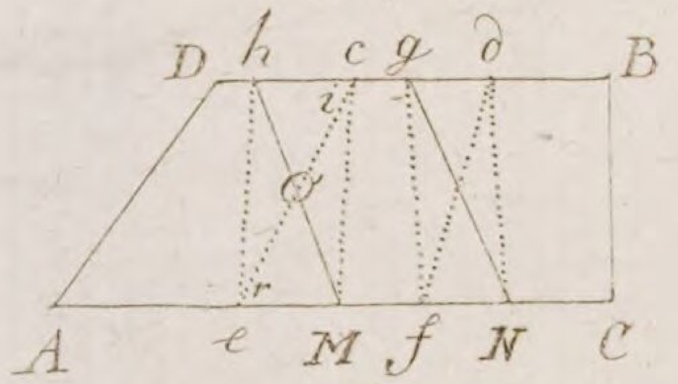


Fig. 98.

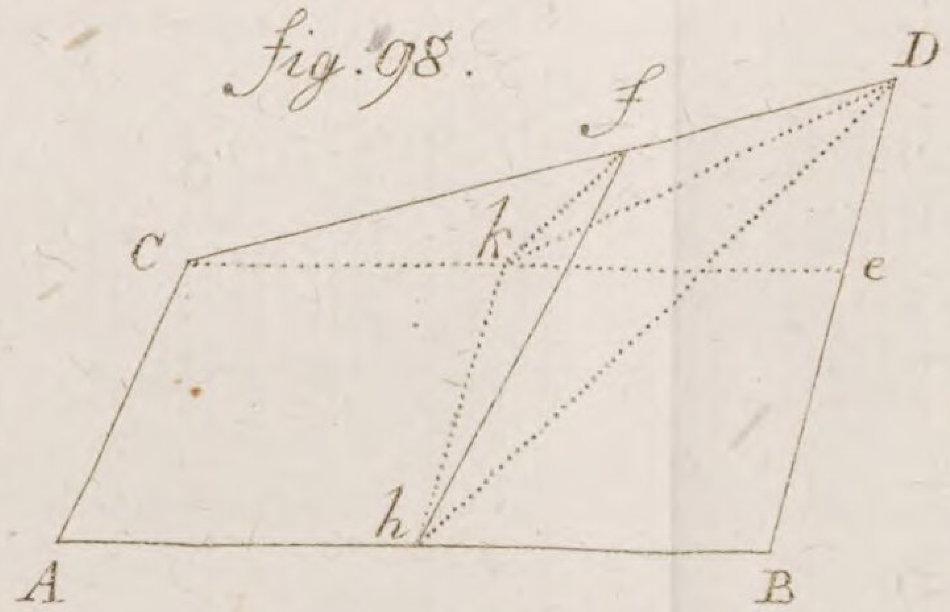


Fig. 96.

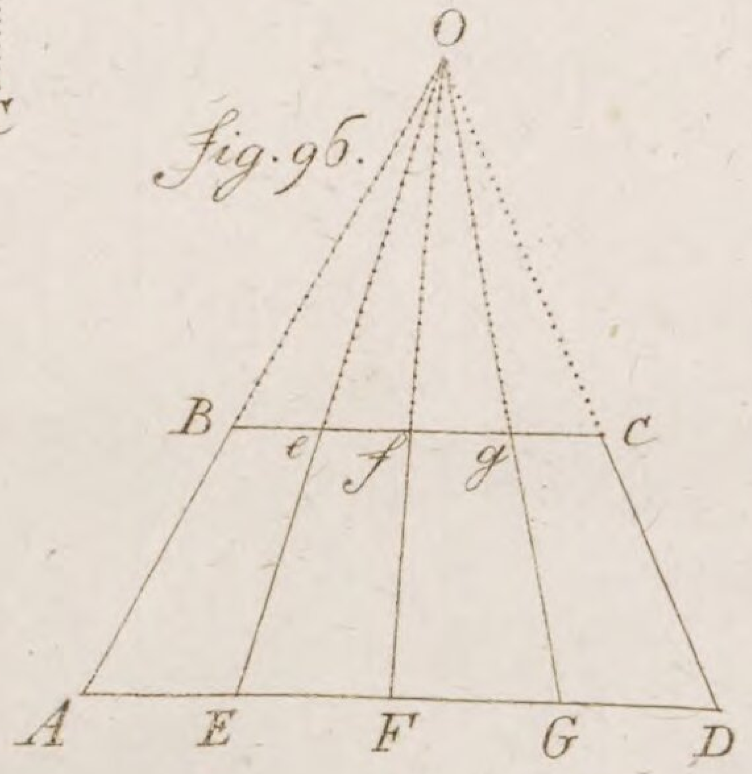


Fig. 99.

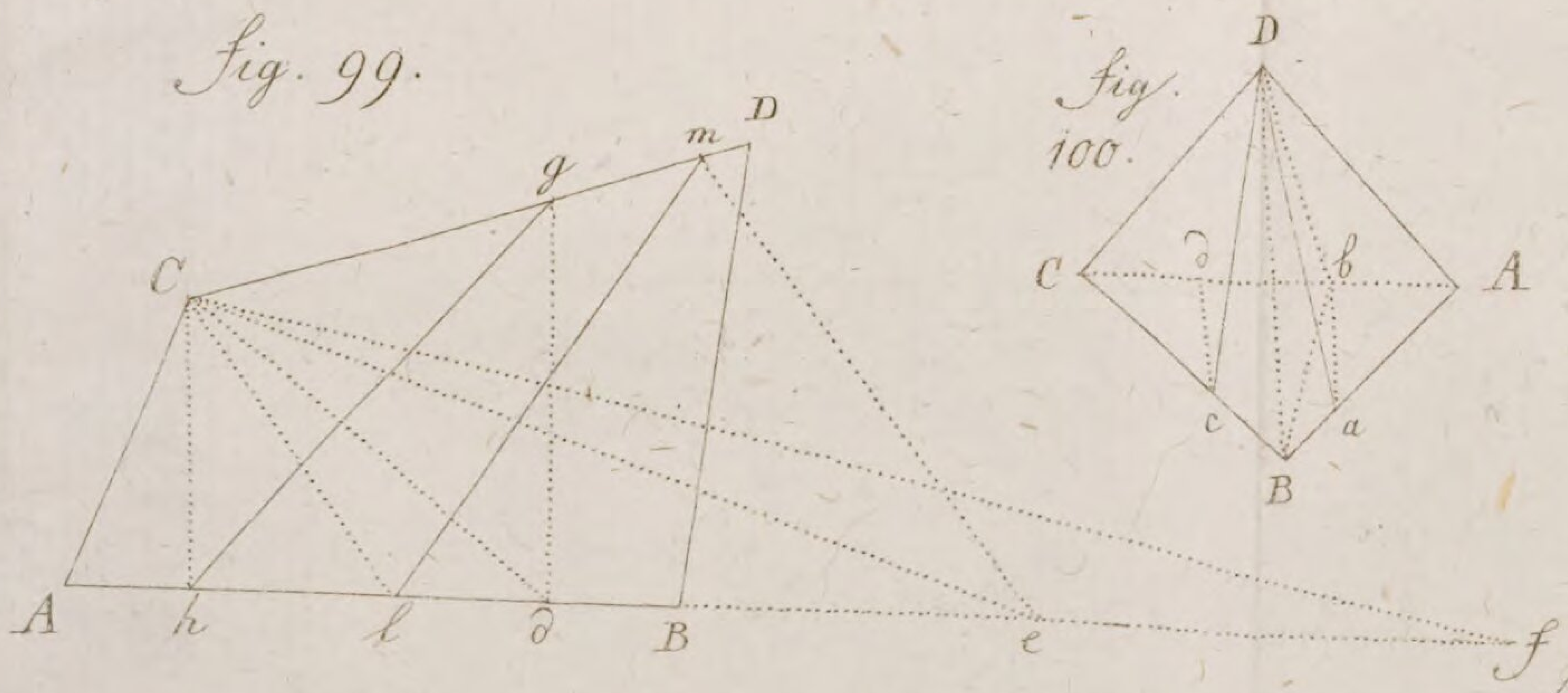


Fig. 100.

Fig. 101.

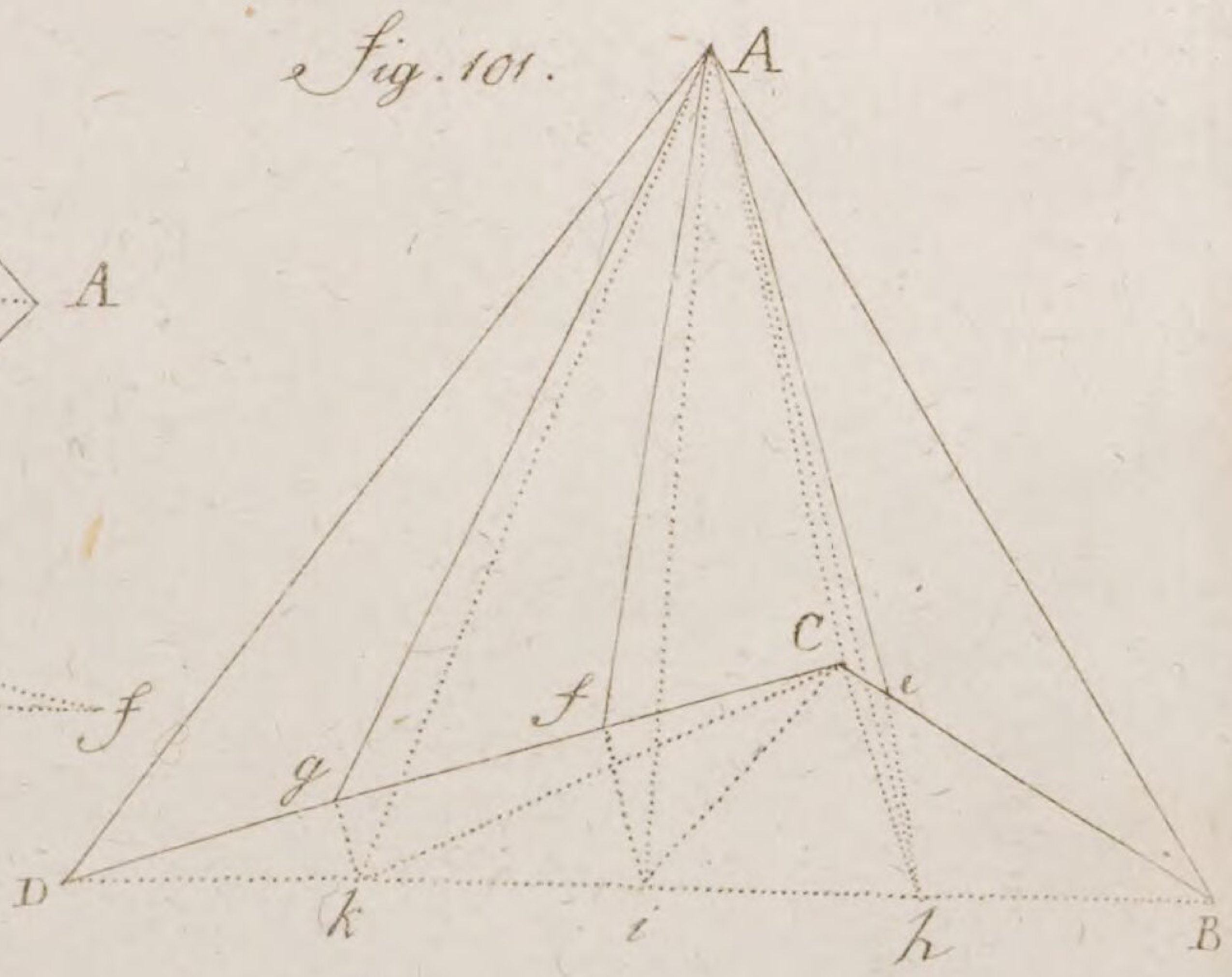


Fig. 102. à. 115. Schoen's Geometrie Tab. VIII.

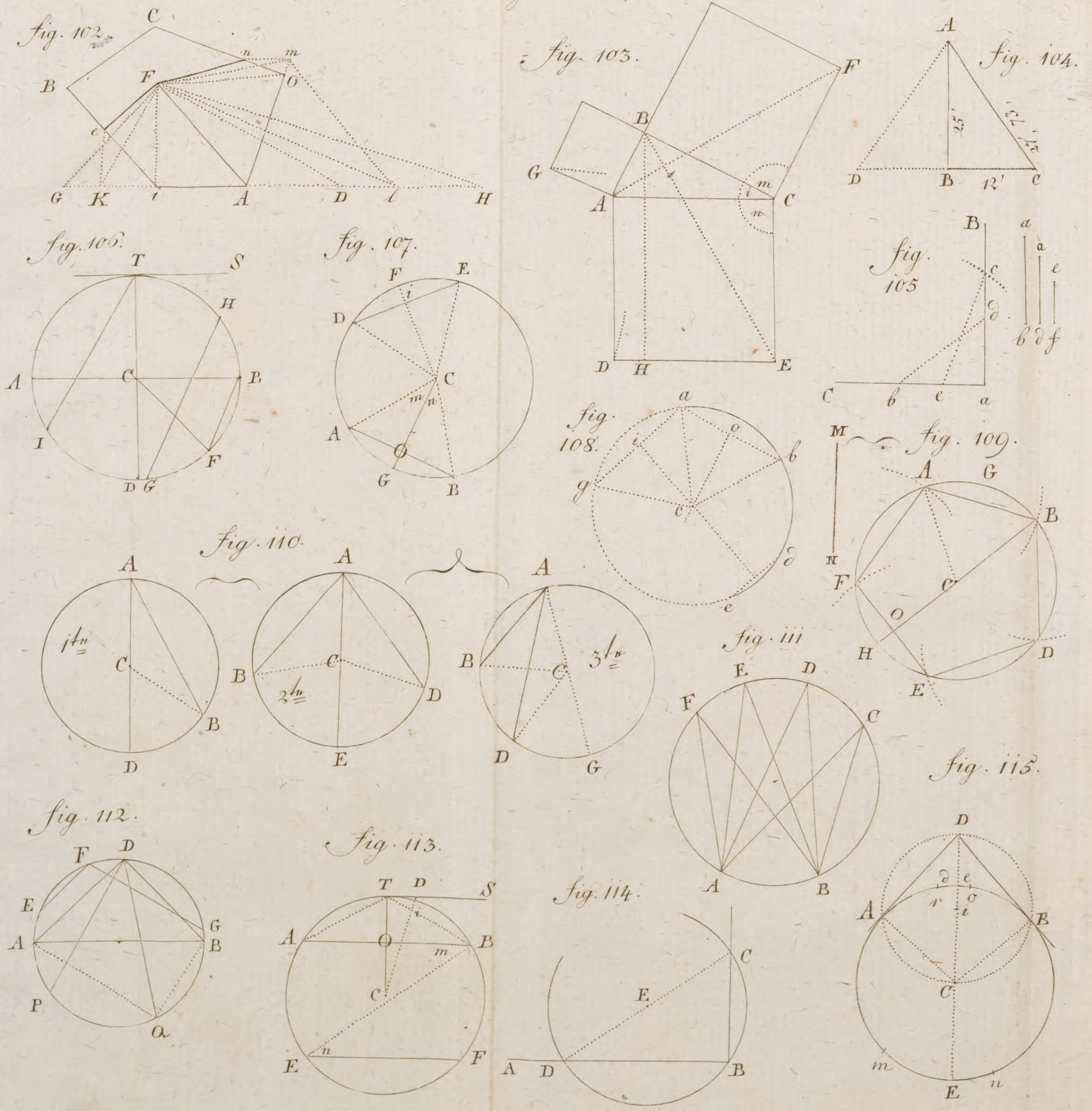


Fig. 116.

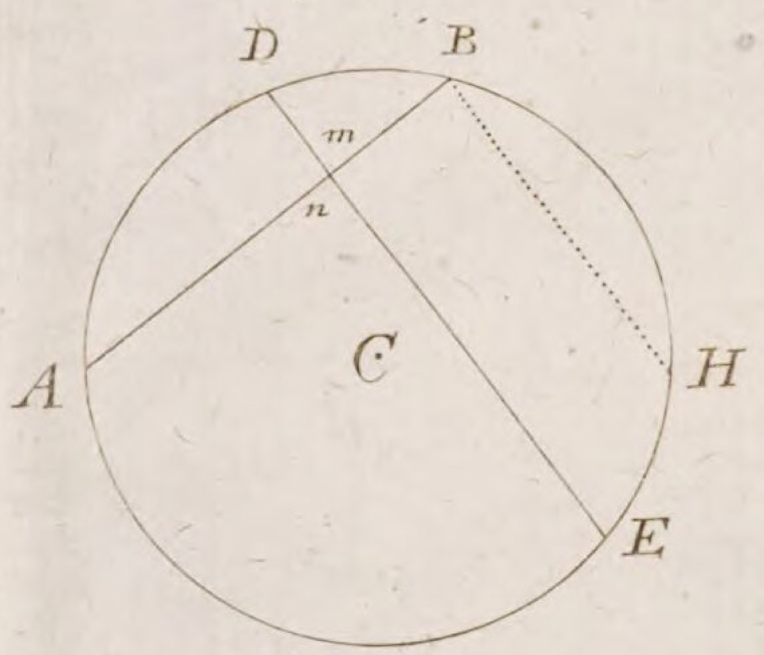


fig 117.

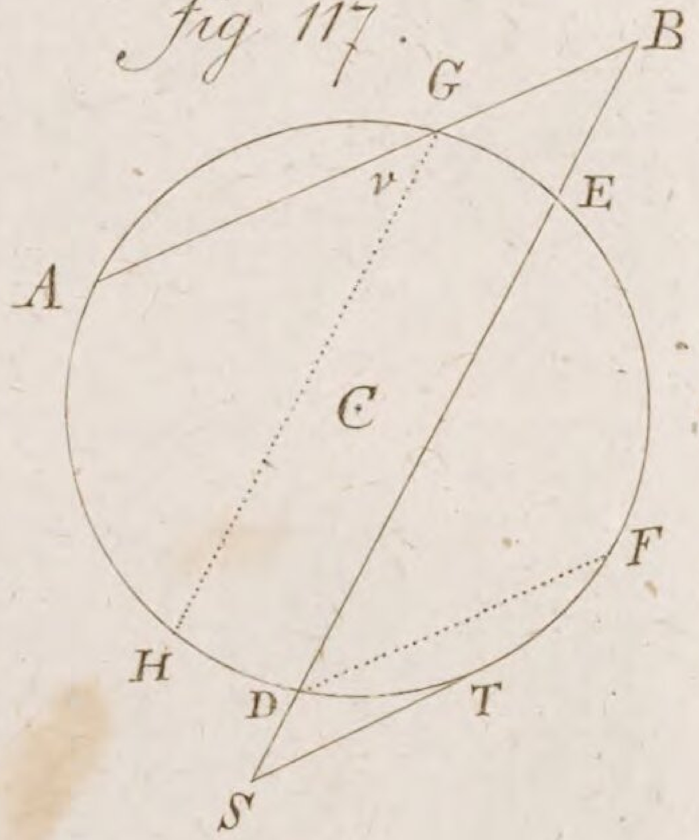


fig. 118.

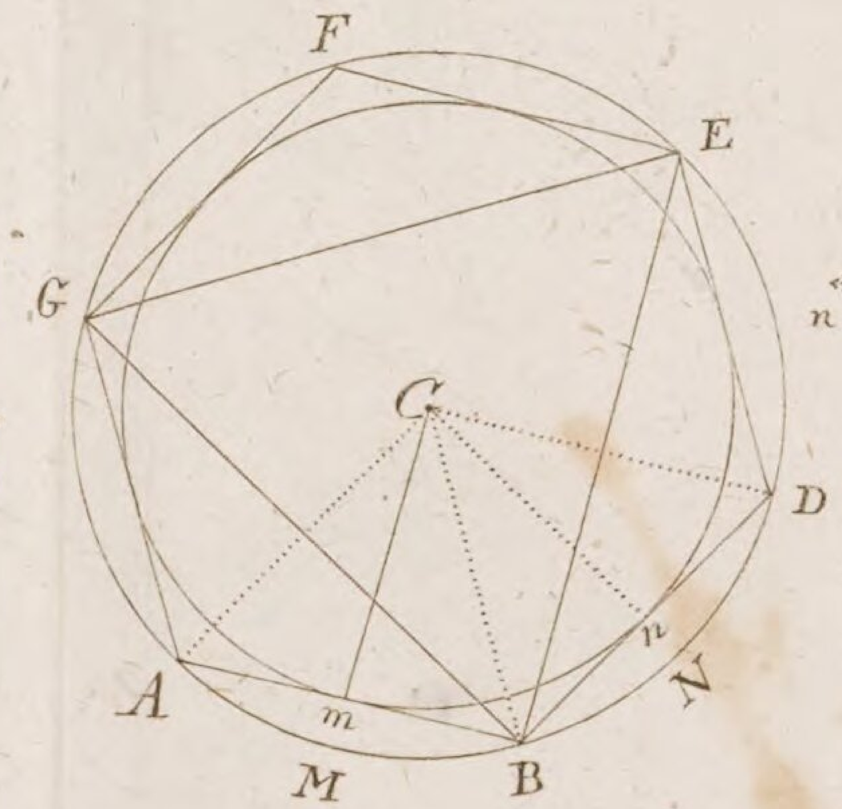


fig. 119.

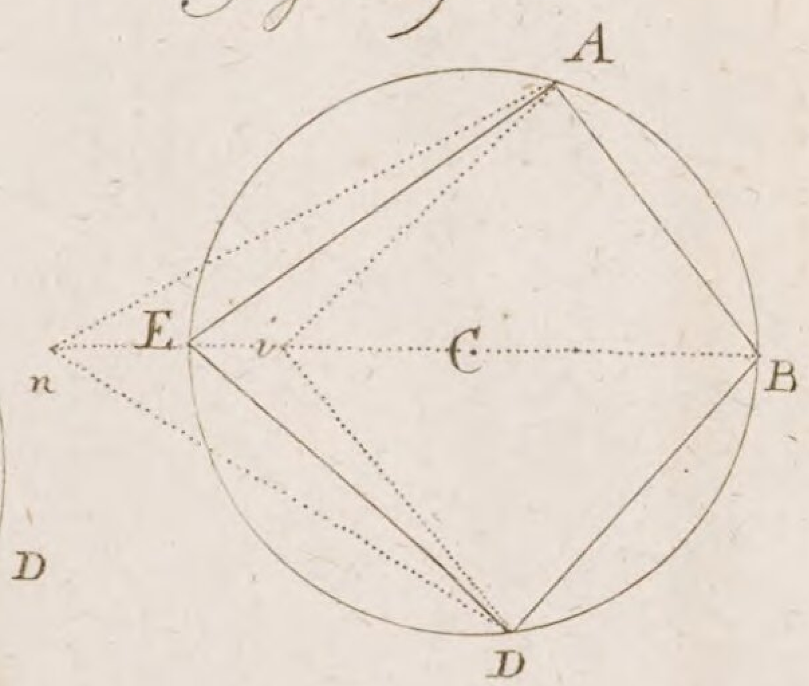


fig. 120.

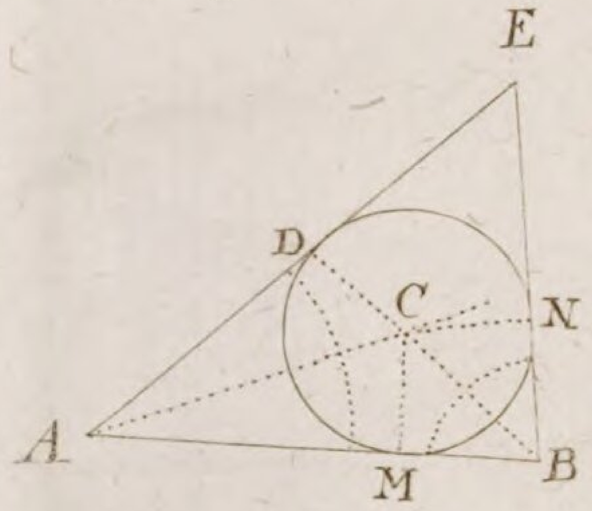


fig. 121.

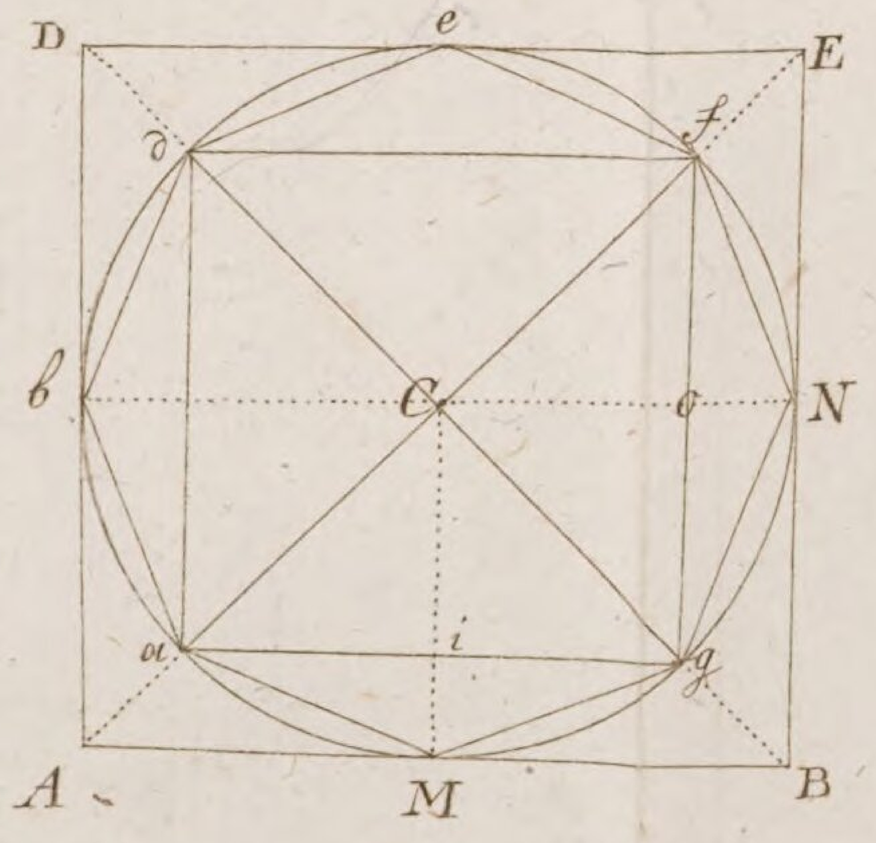
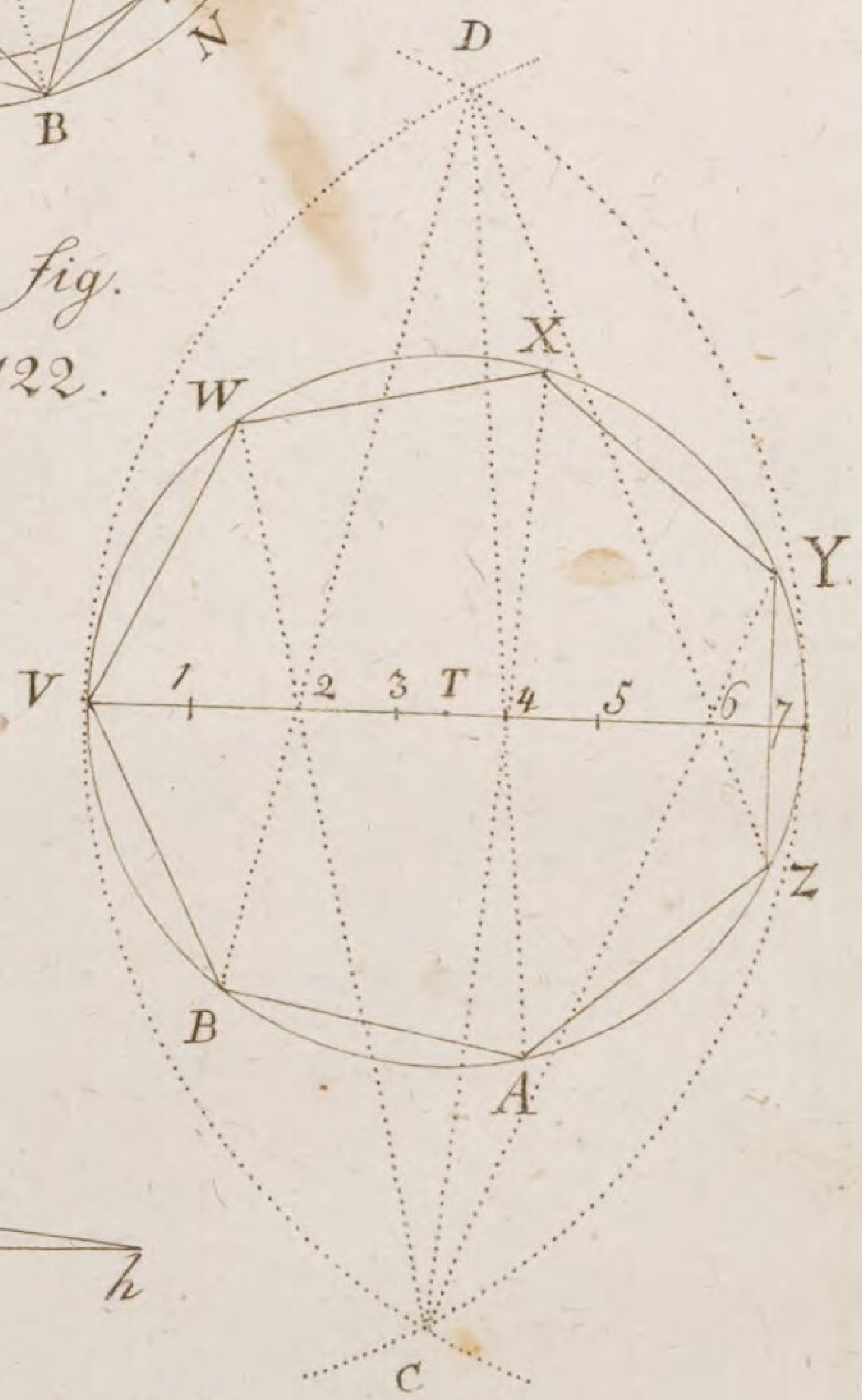


fig. 122.



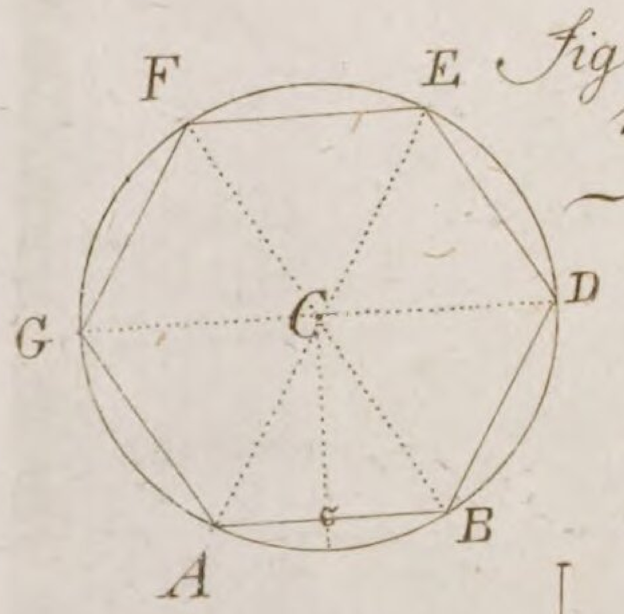


fig. 123.

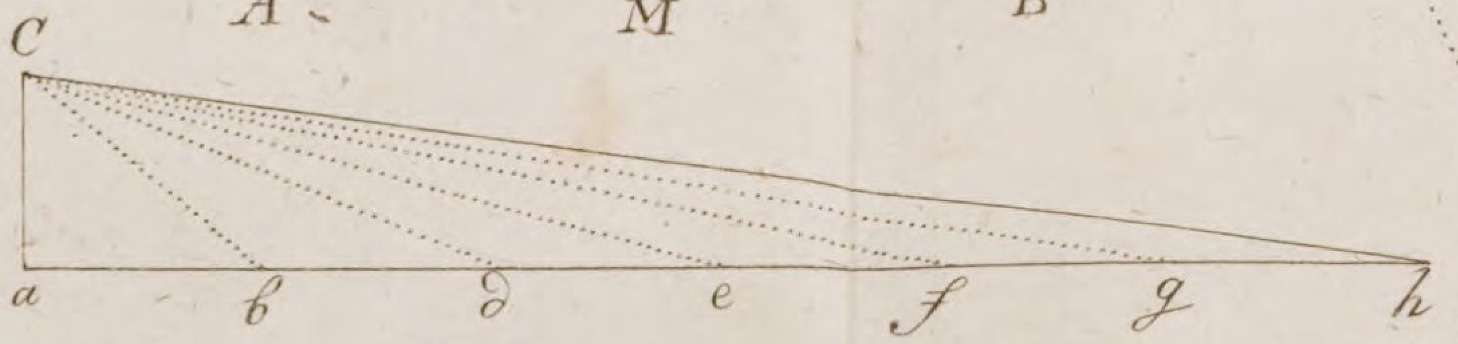


fig. 124.

fig. 125.

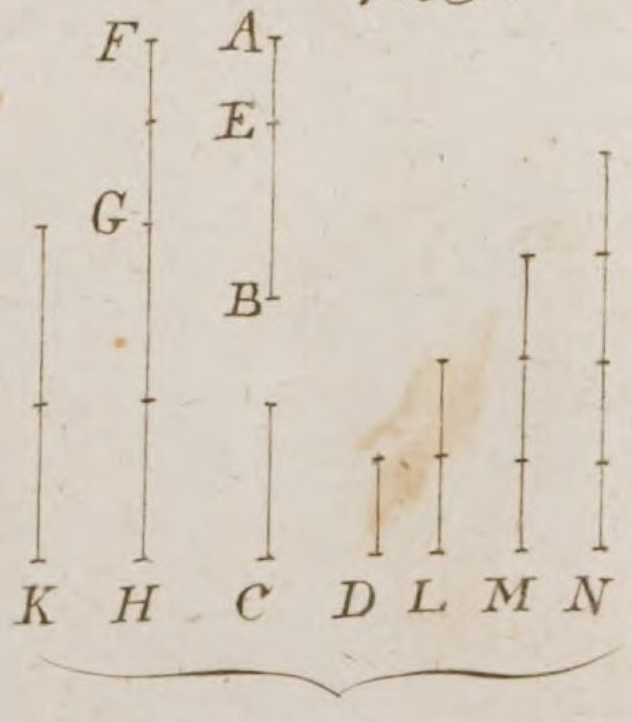


fig. 126.

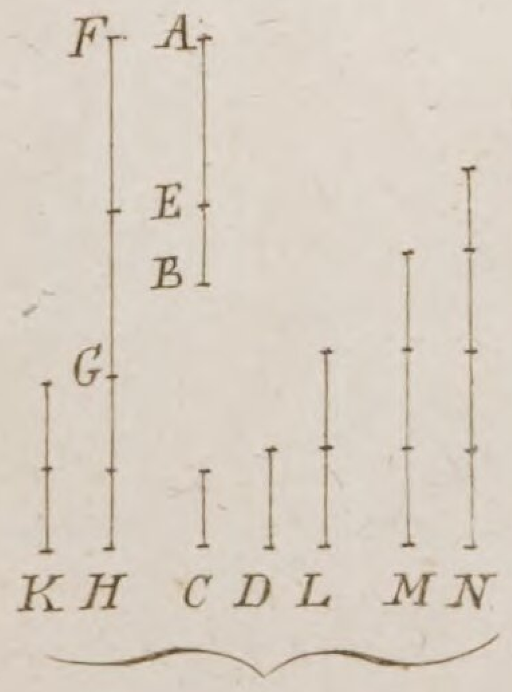


fig 127.

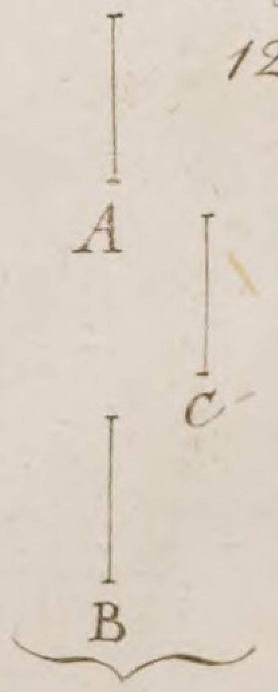
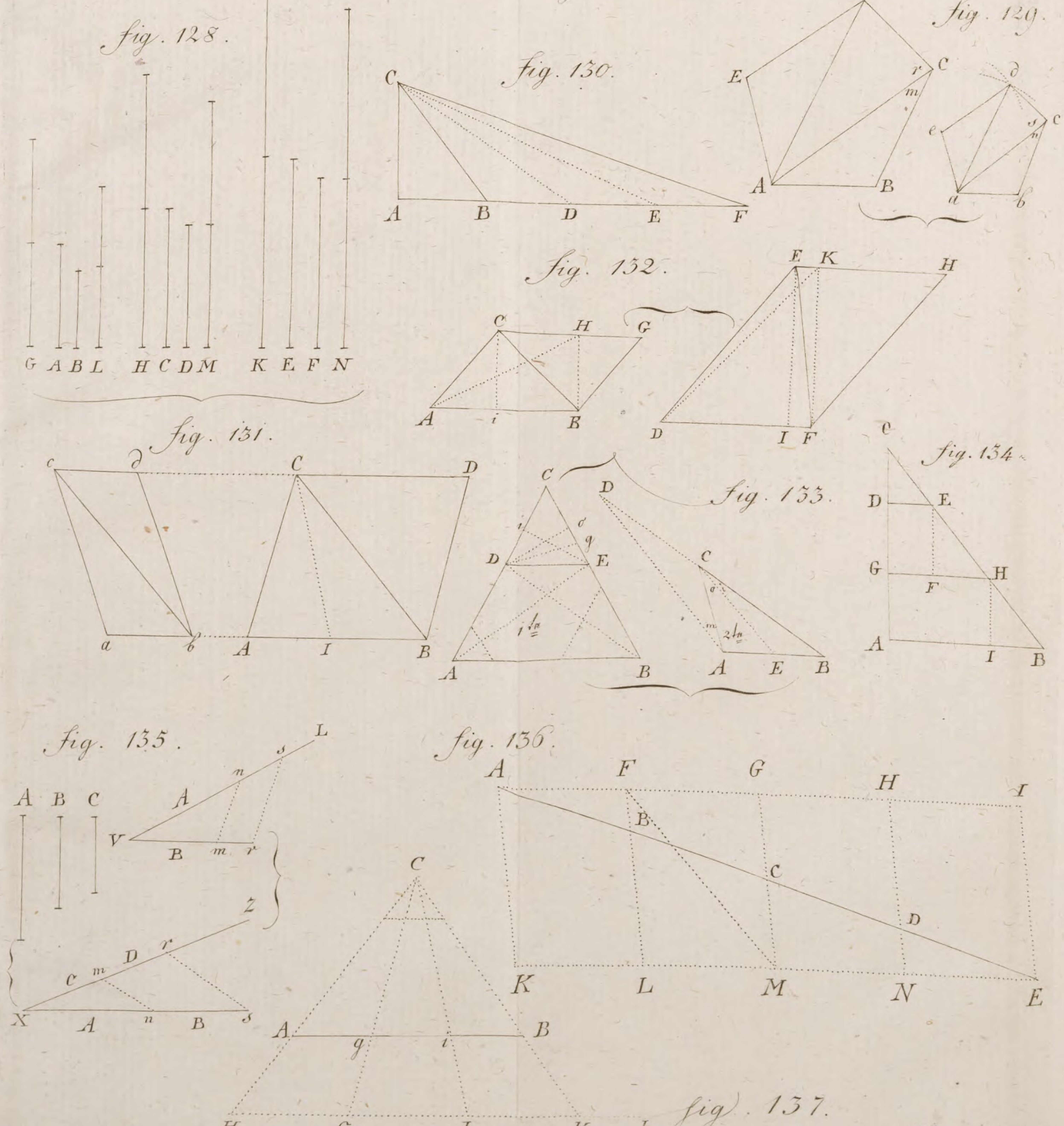


Fig. 128. à 137. Schoens Geometrie Tab. X.



Stumpf sc.

Fig. 138.

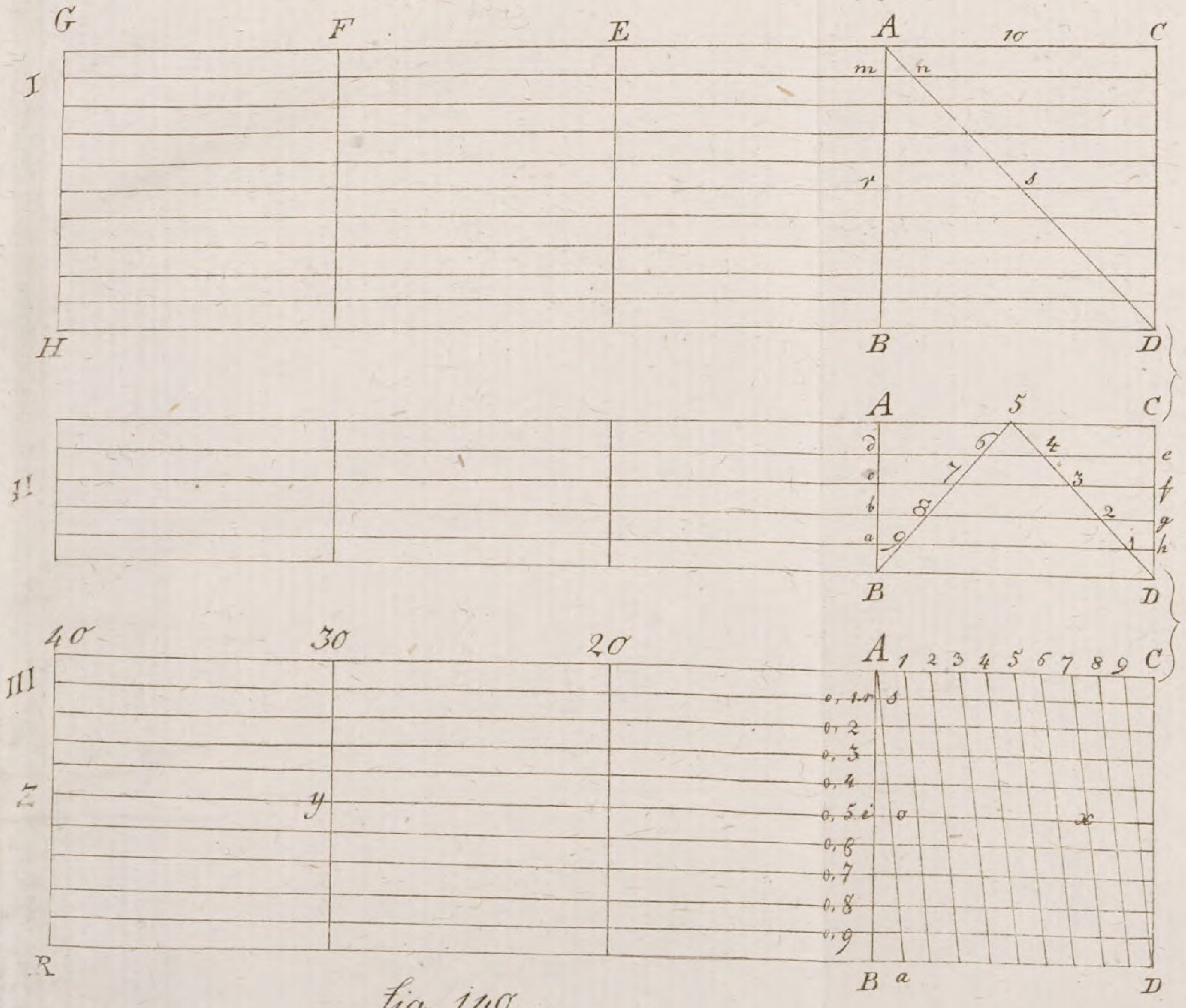


Fig. 142.

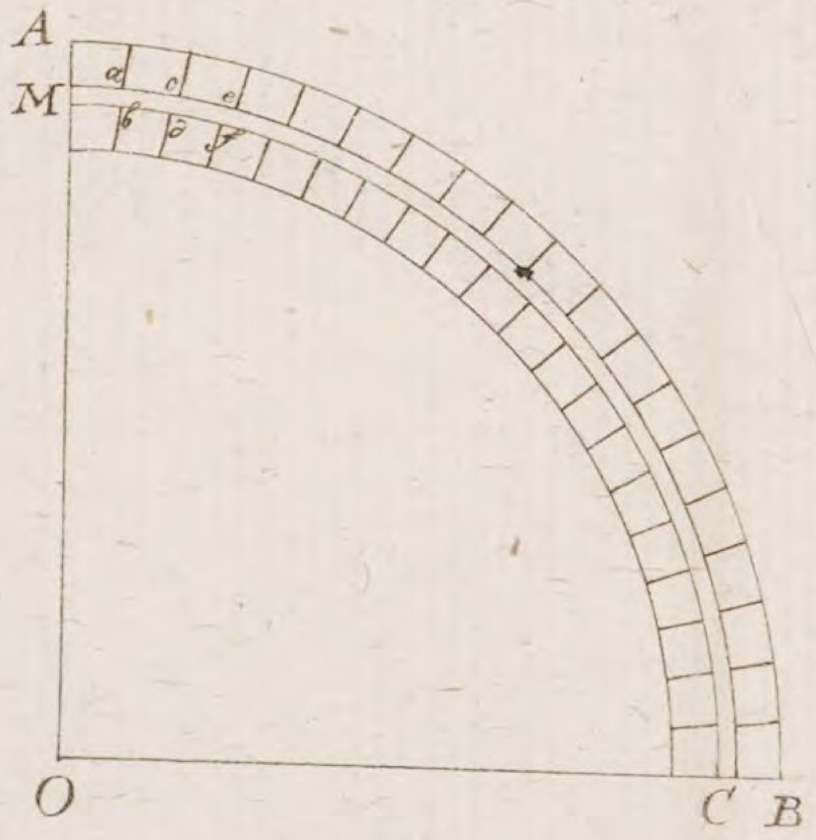


Fig. 143

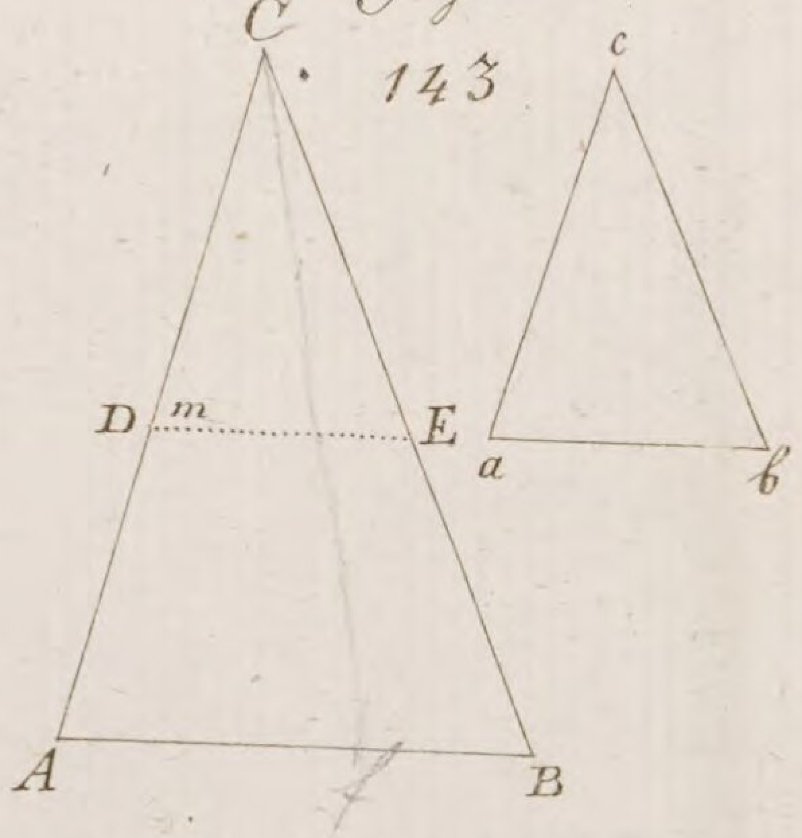


Fig. 140.

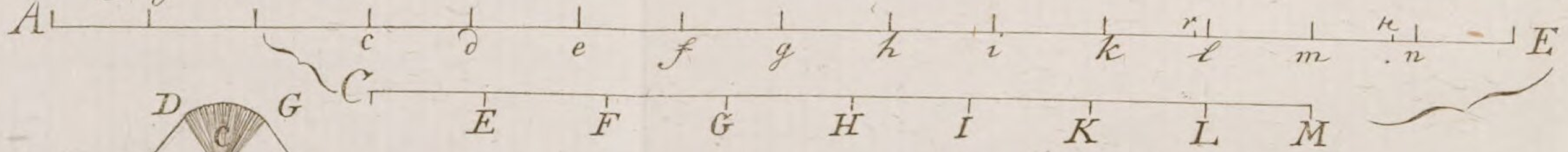


Fig. 139.

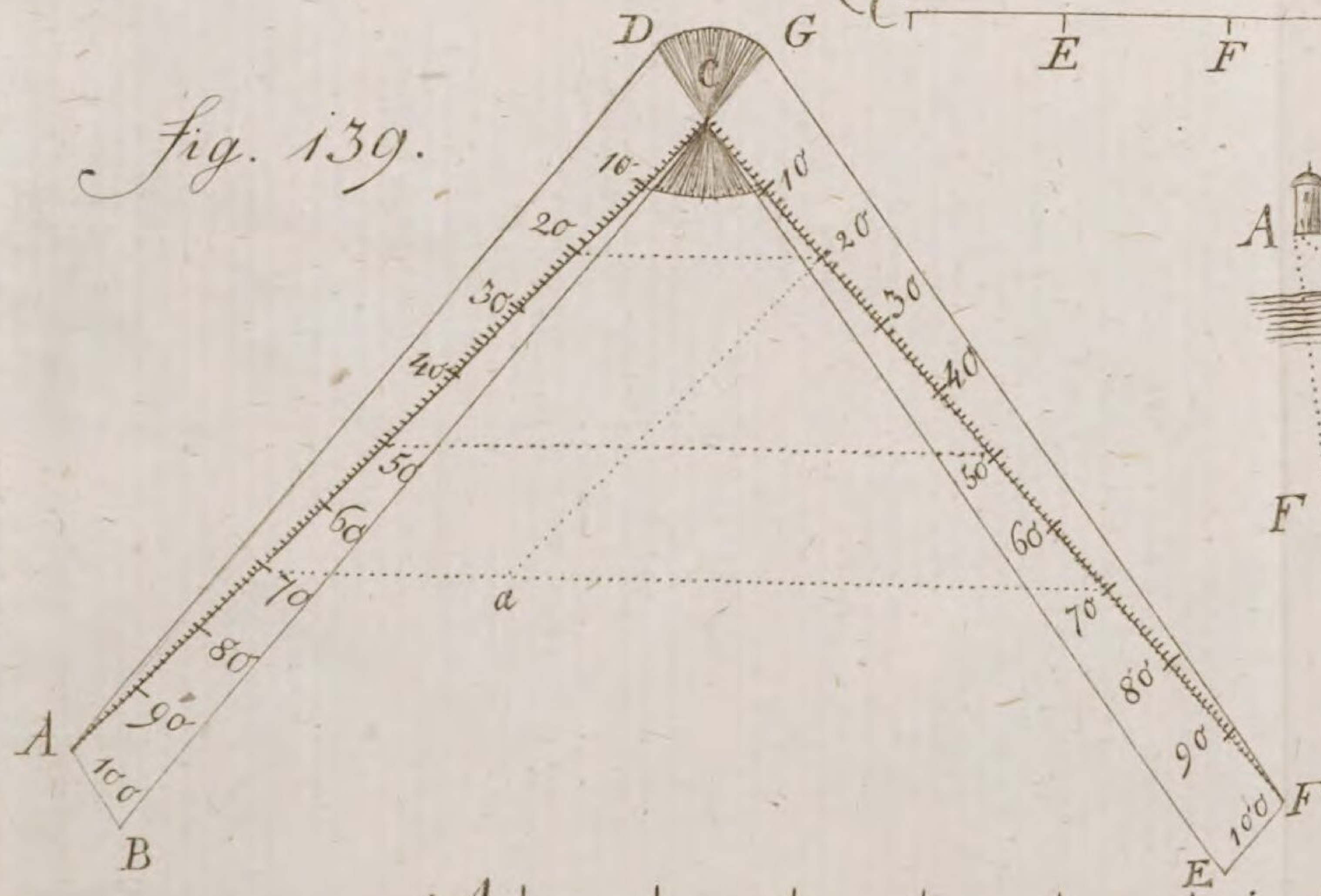


Fig. 144.

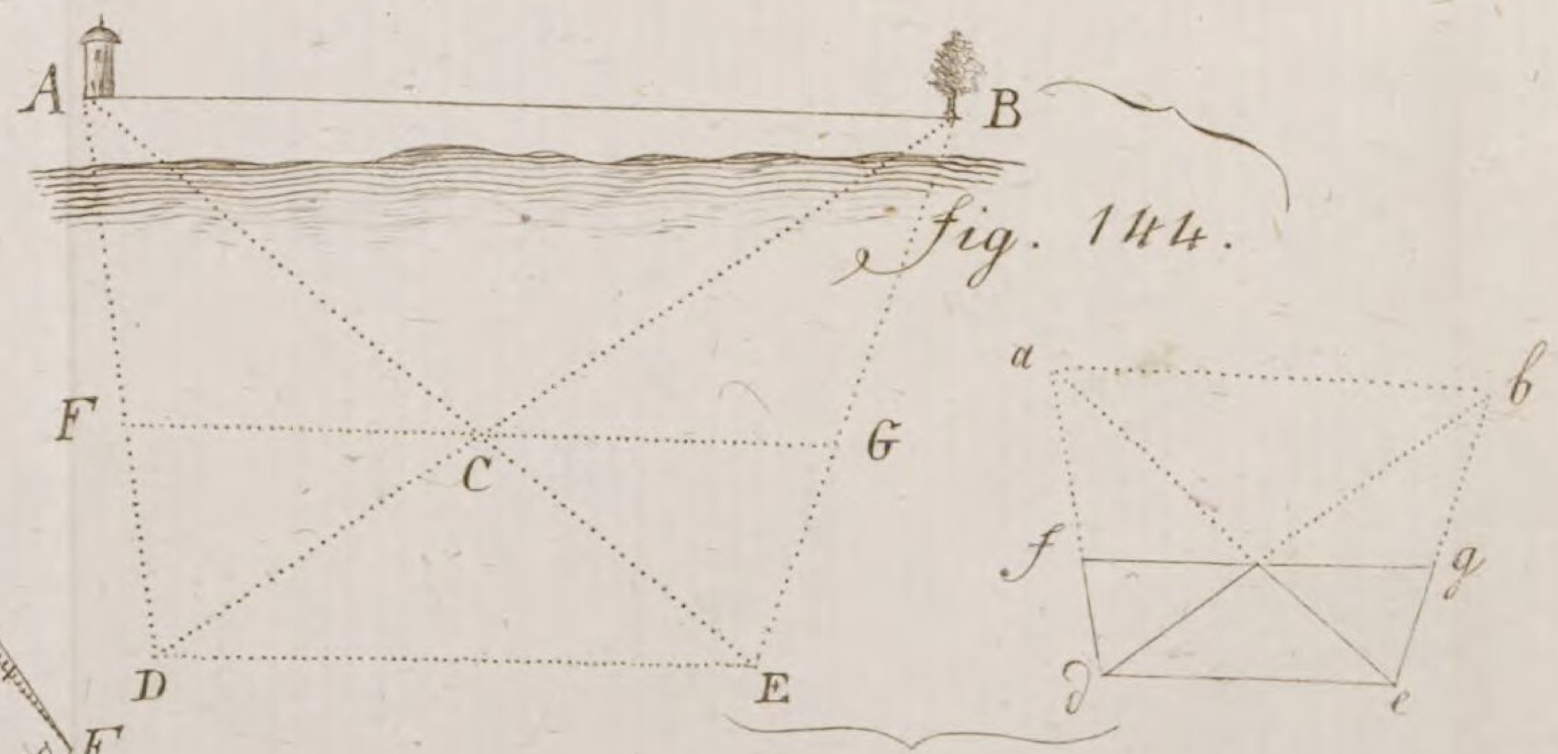


Fig. 141.

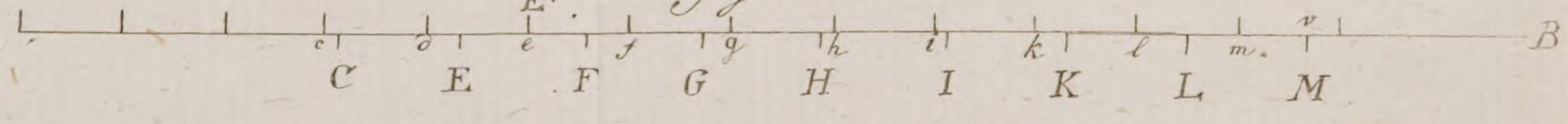


Fig. 153.

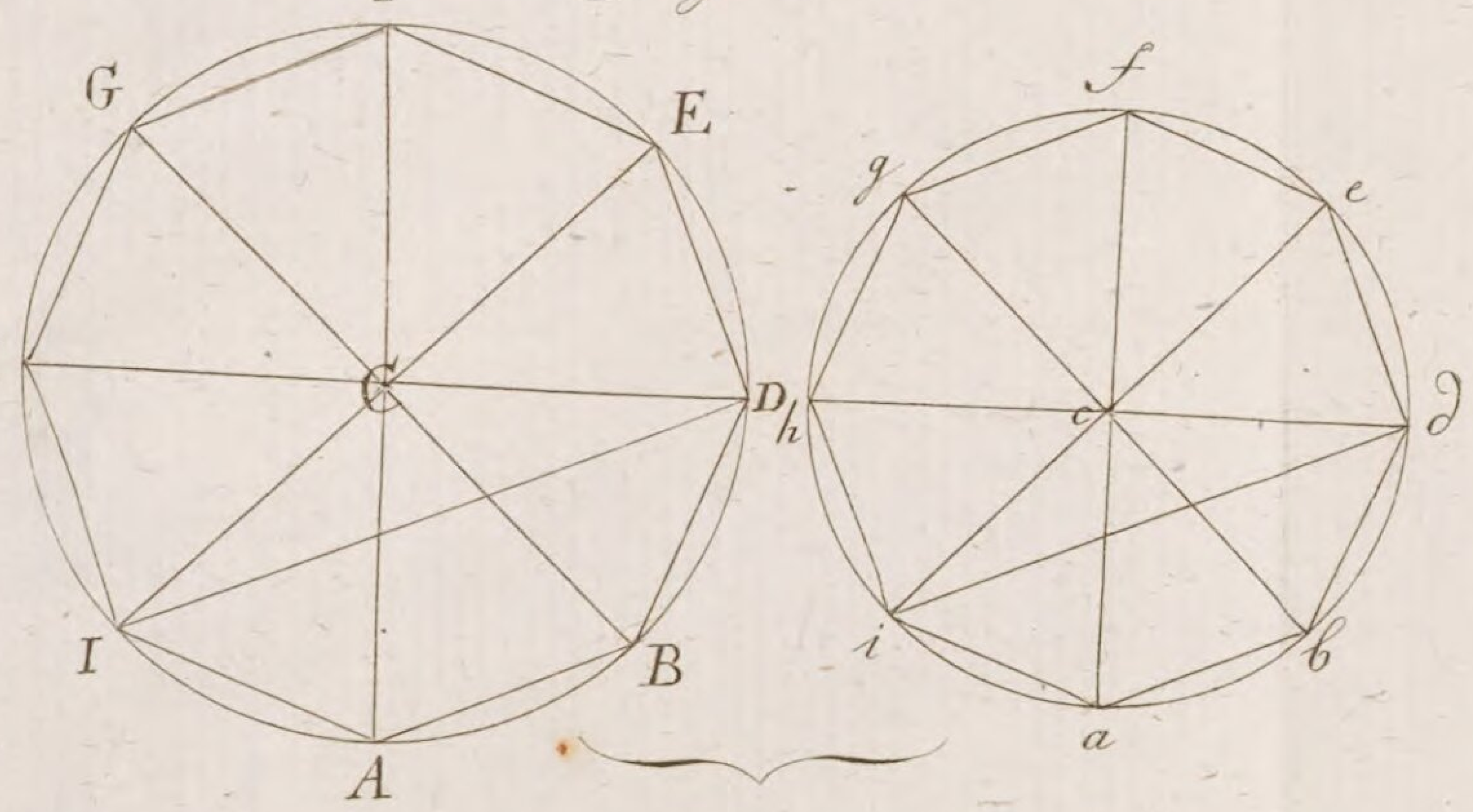


Fig. 154.

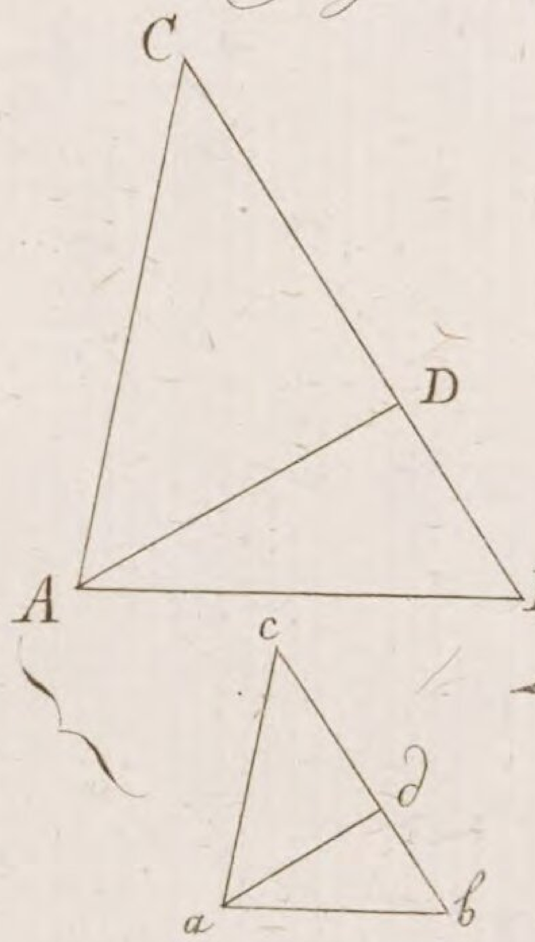


Fig. 155.

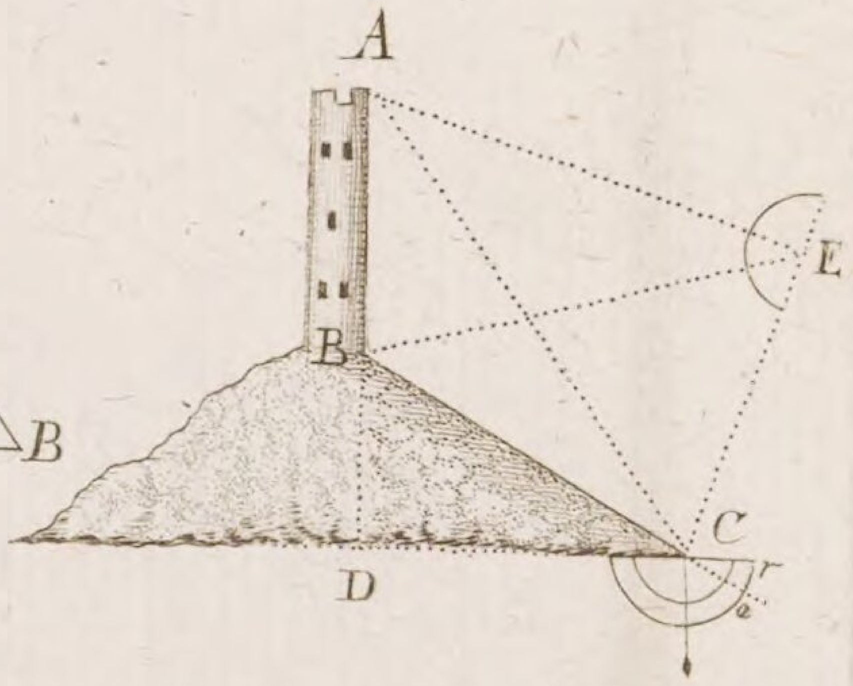


Fig. 156.

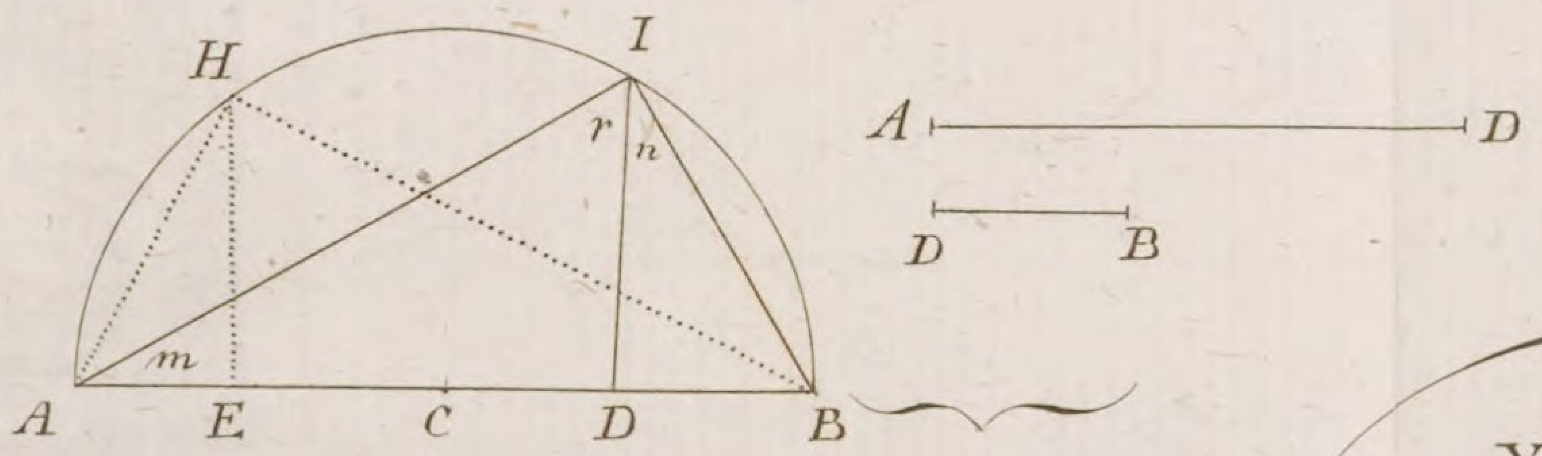


Fig. 157. 1te

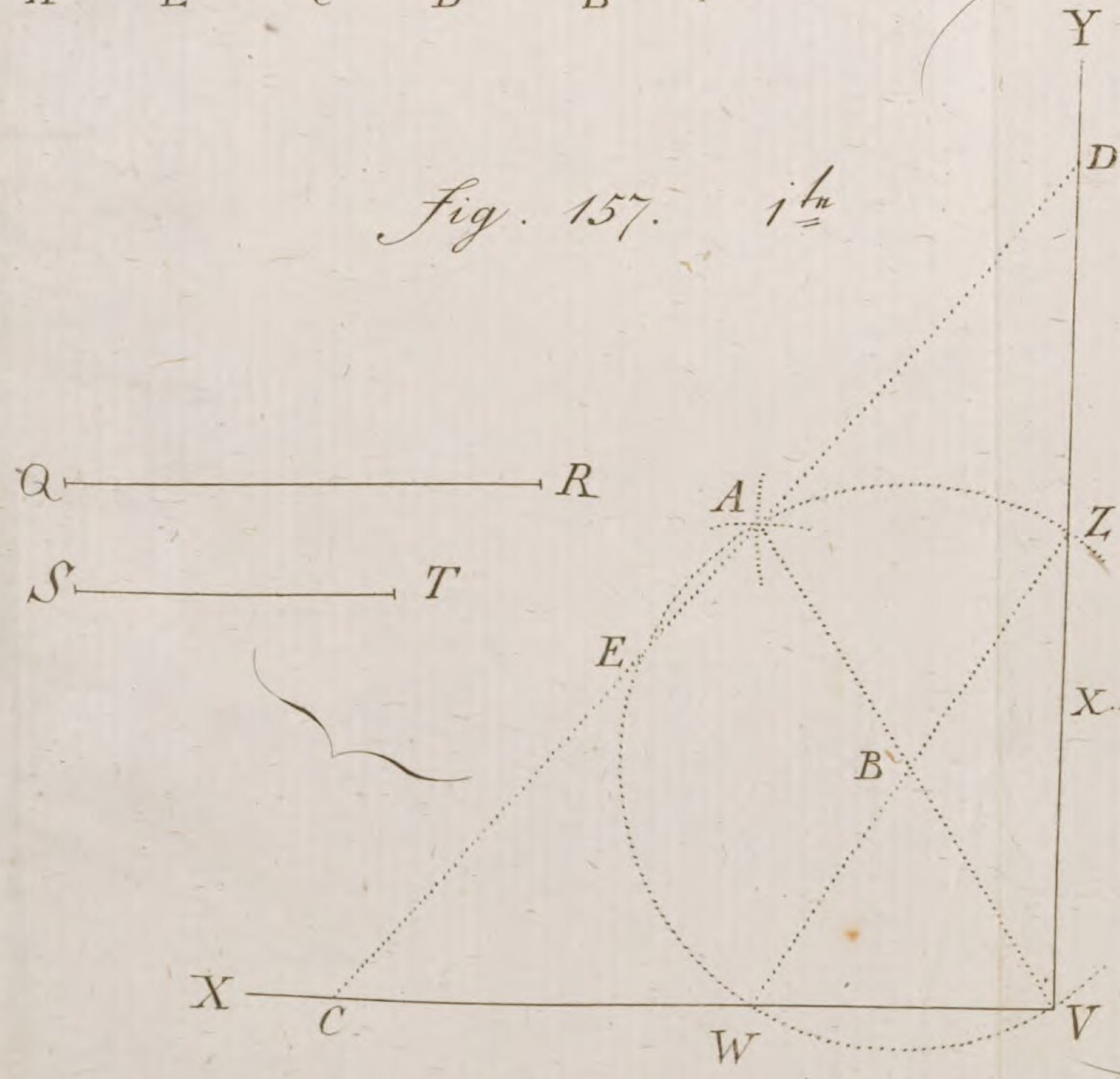


Fig. 157. 2te

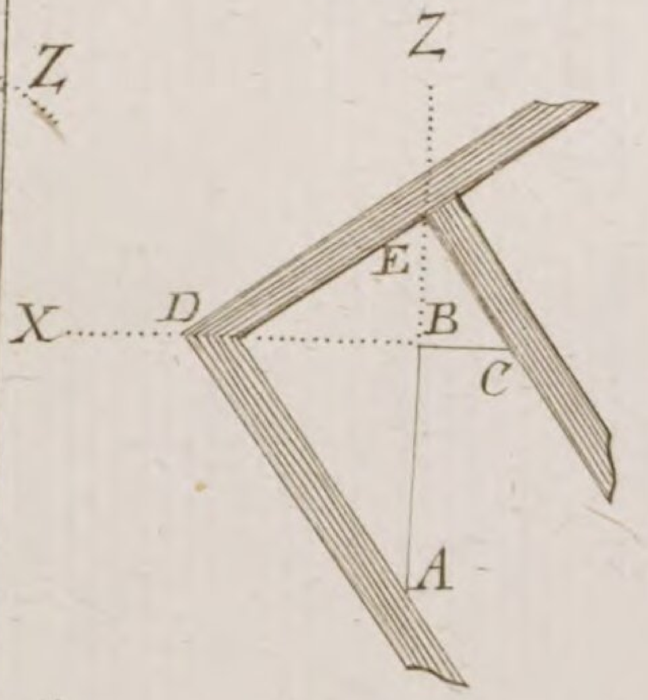


Fig. 157. 3te

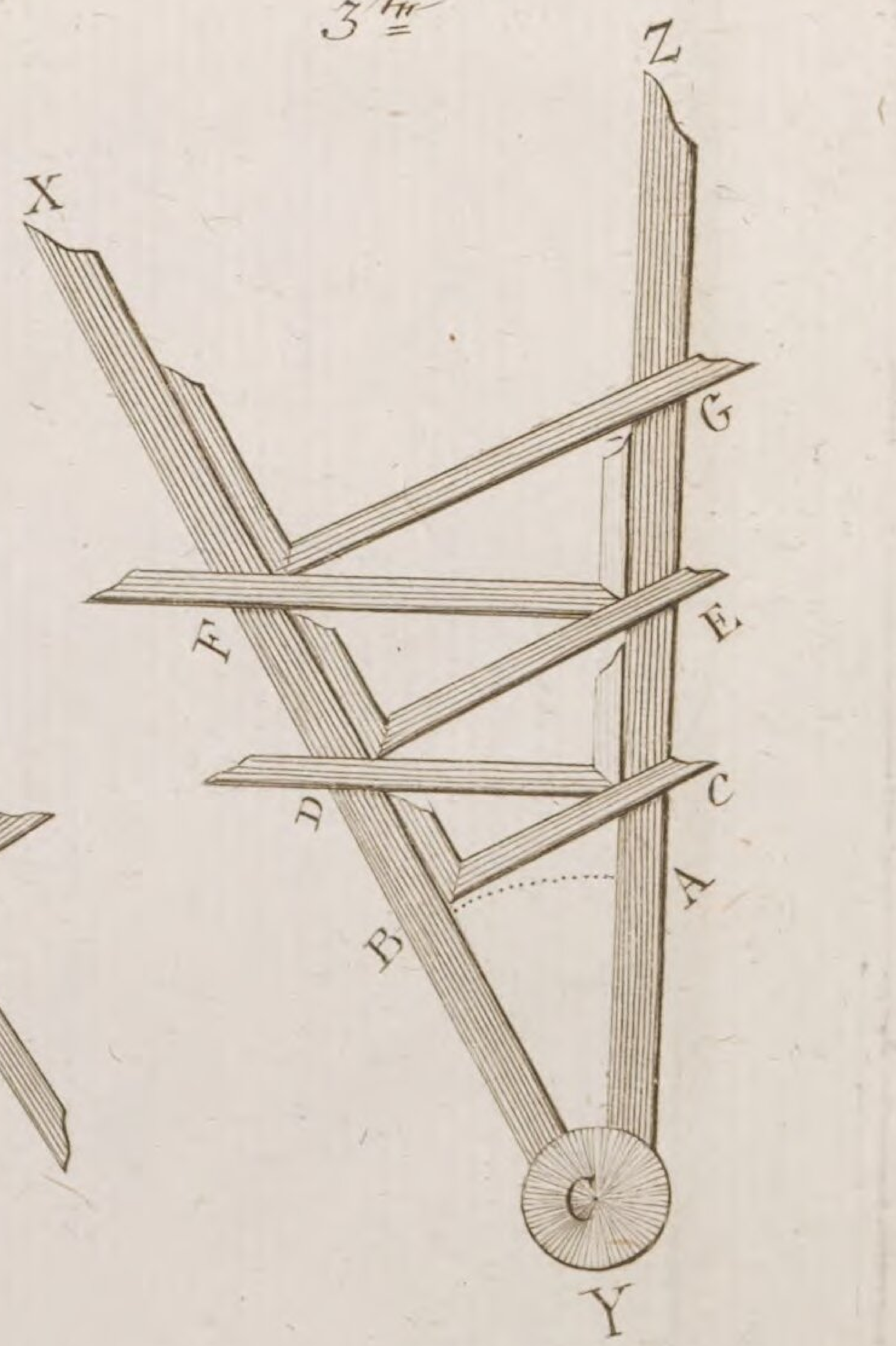


Fig. 158.

Fig. 159.

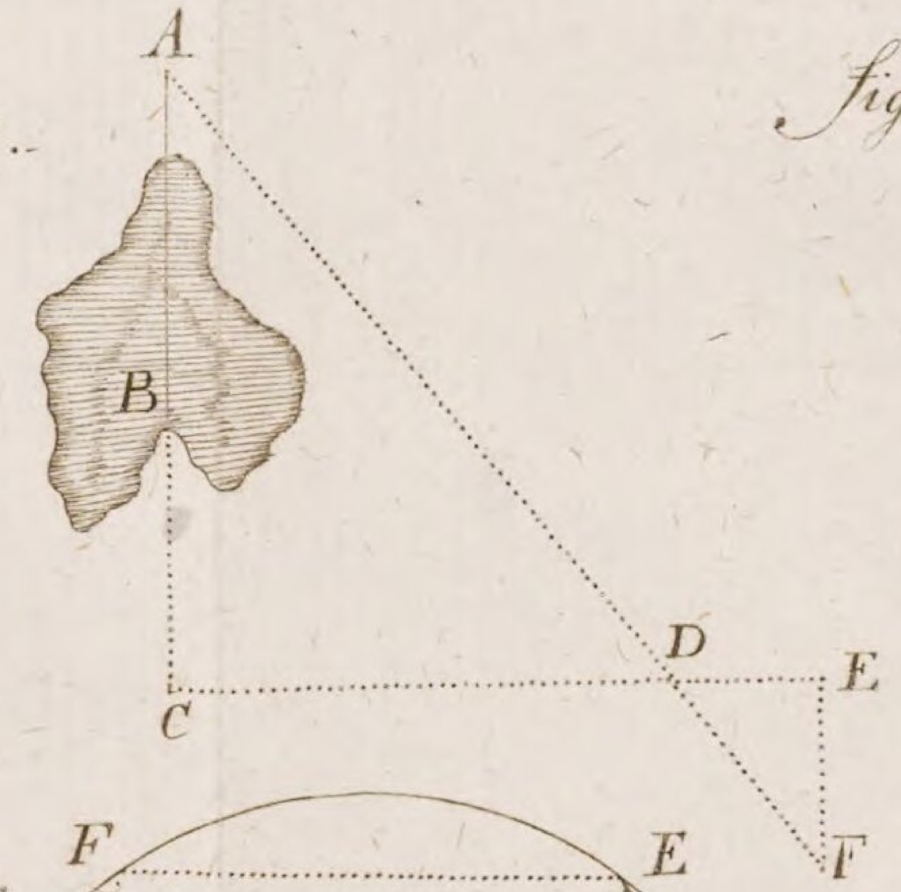


Fig. 160.

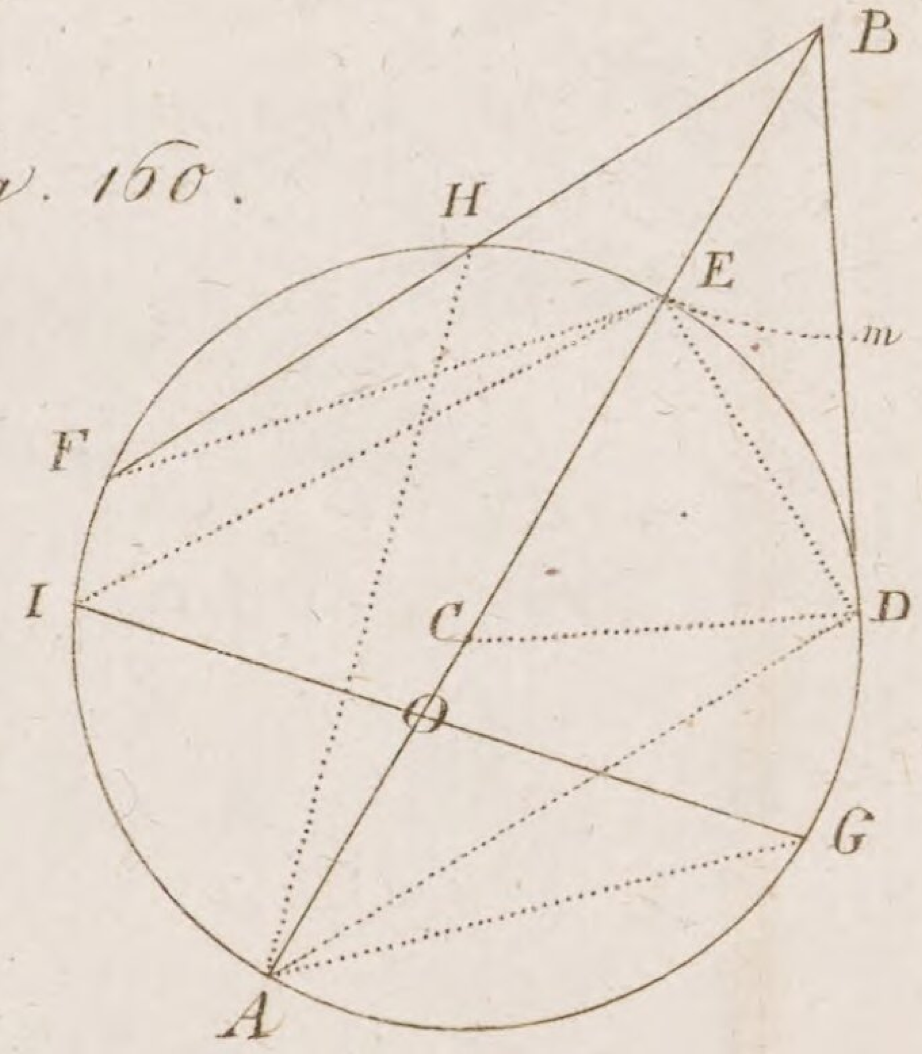


Fig 161.

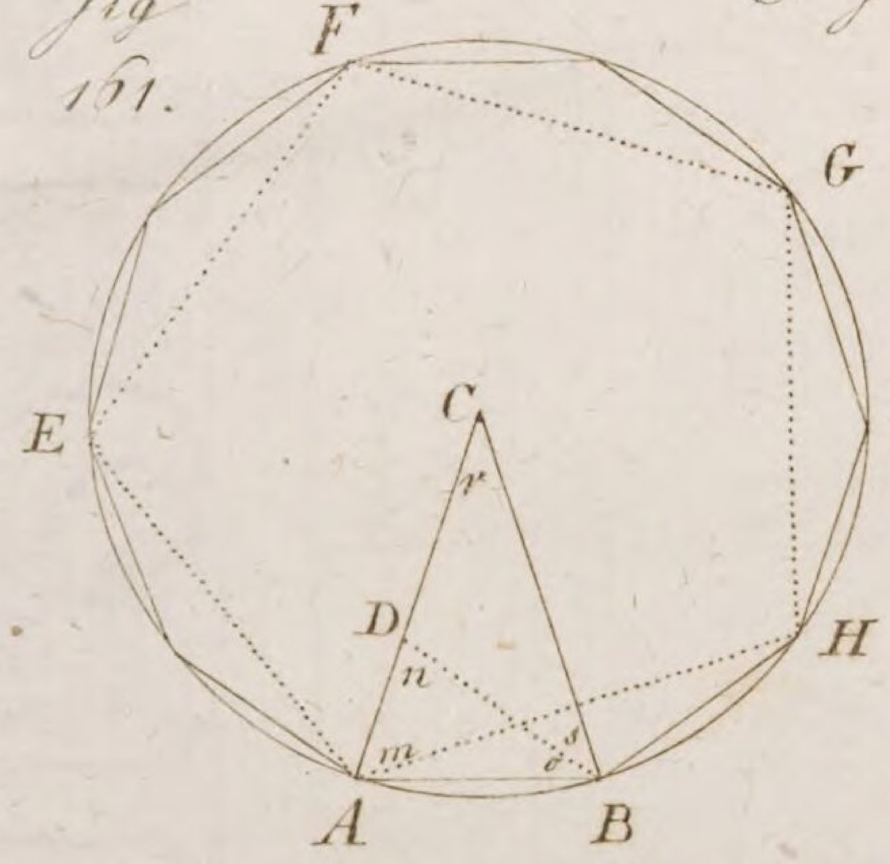


Fig. 162.

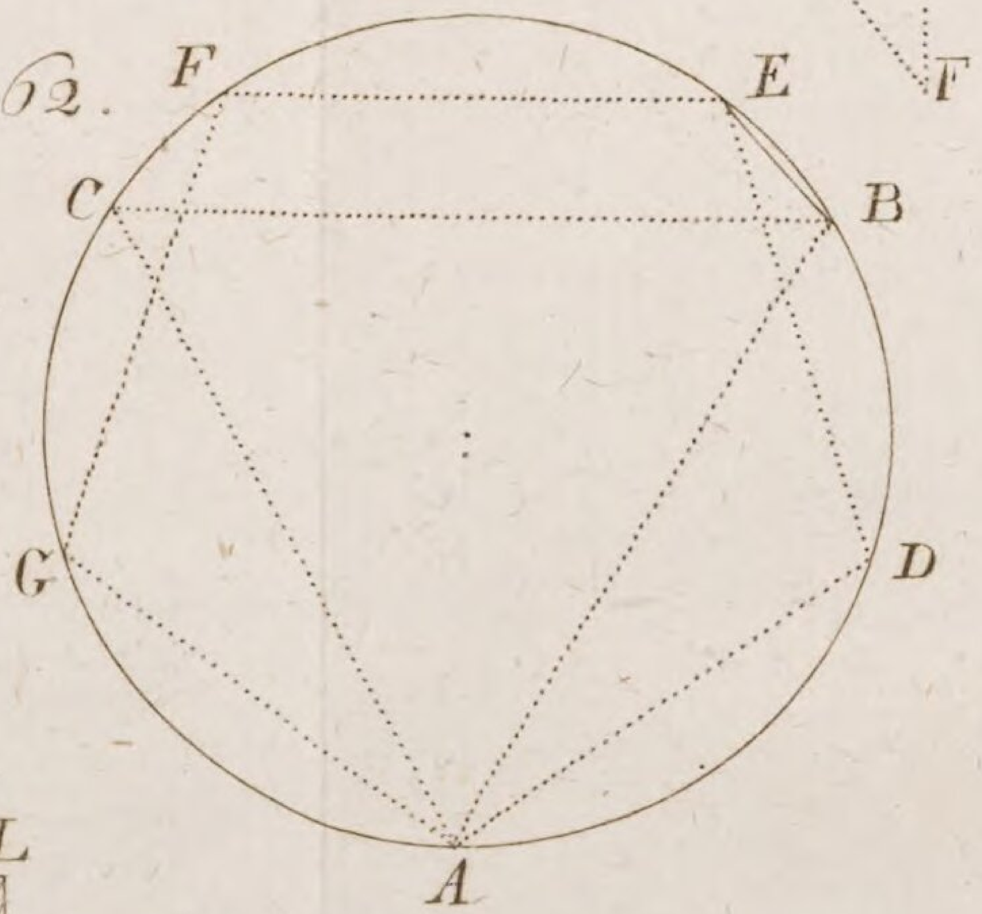


Fig. 163.

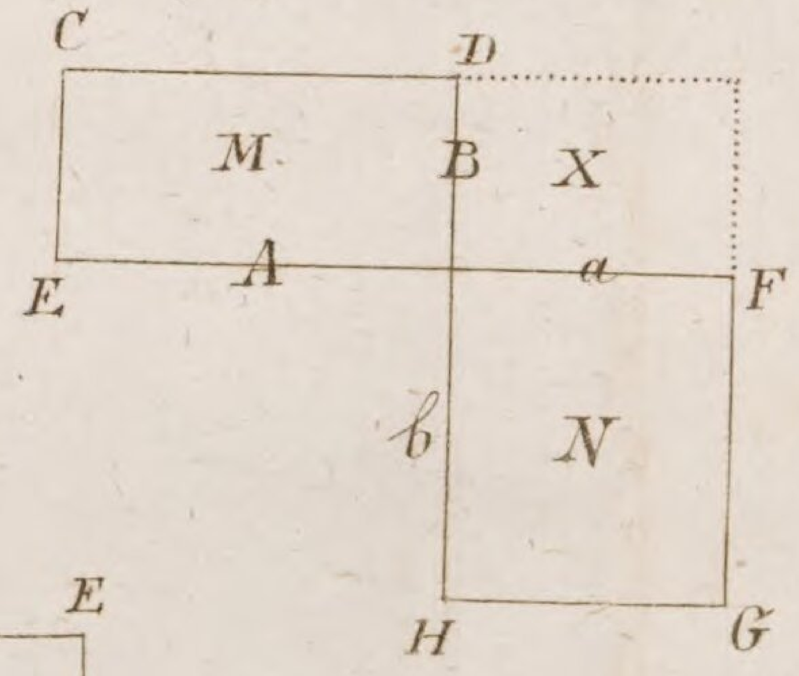
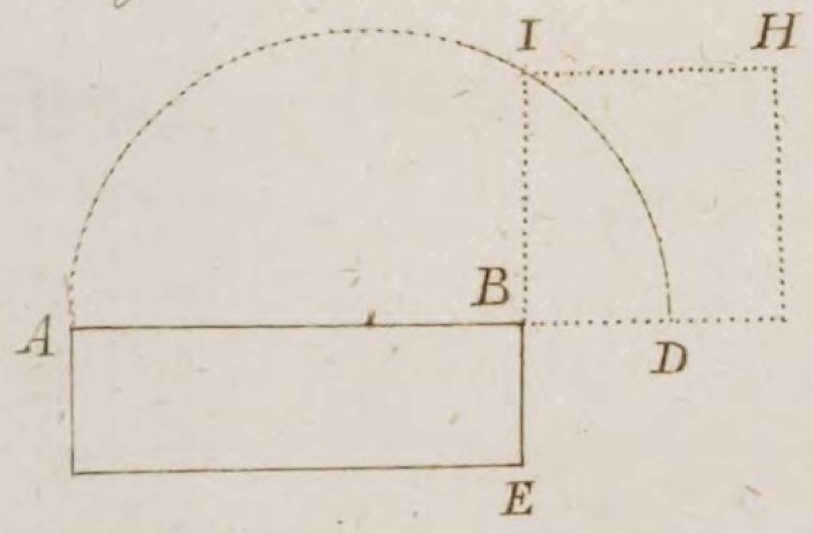
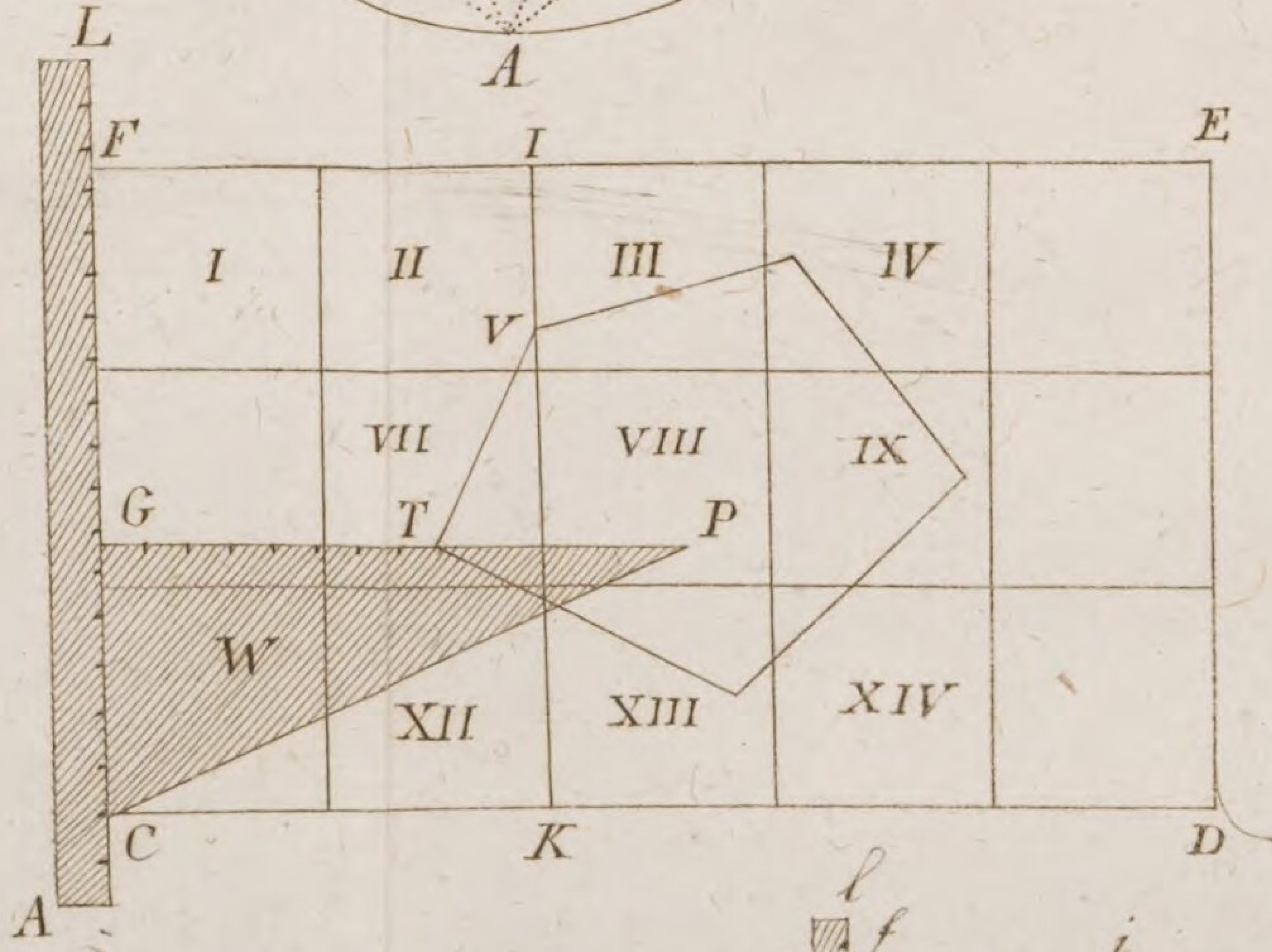


Fig. 164.





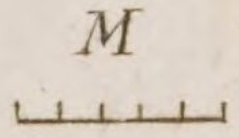


Fig. 165.

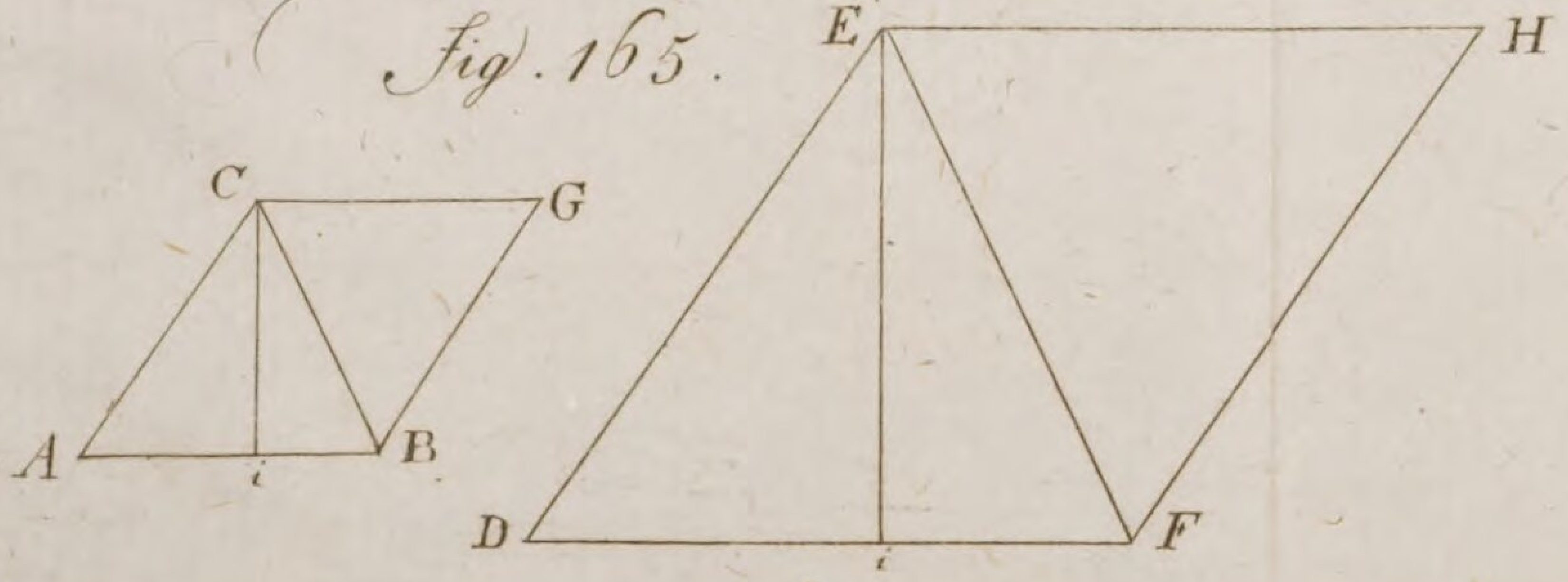


Fig. 166.

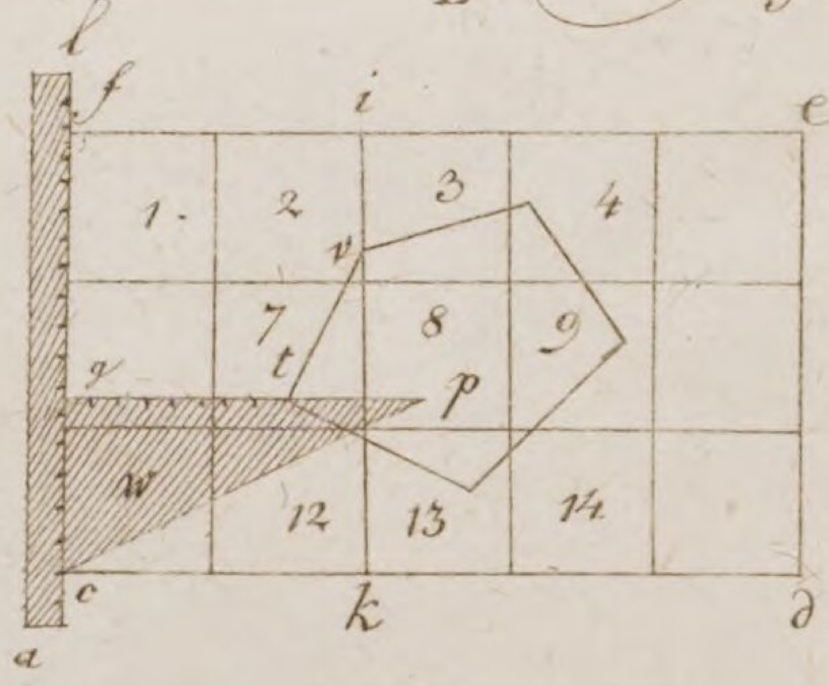


Fig. 167.

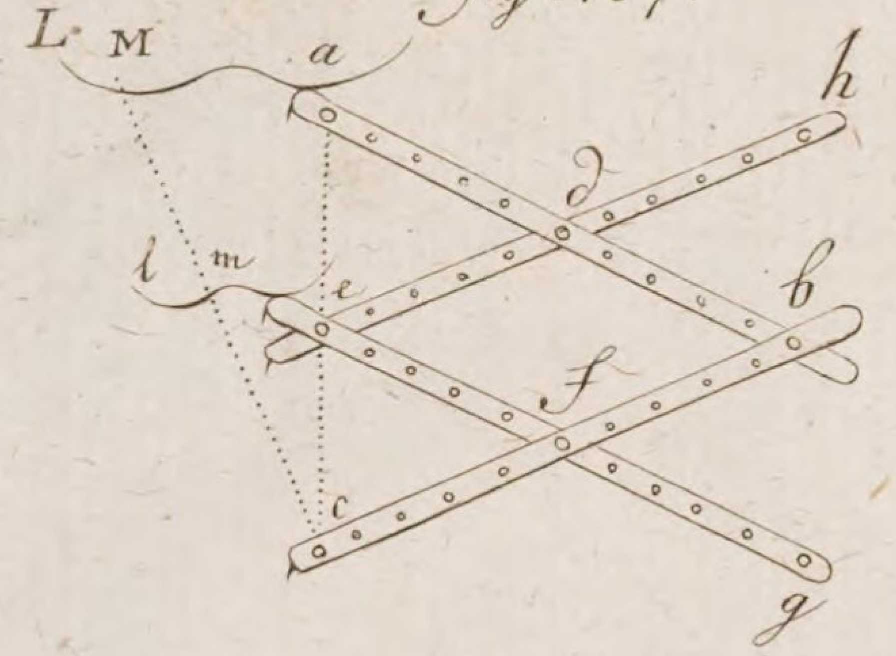


Fig. 168.

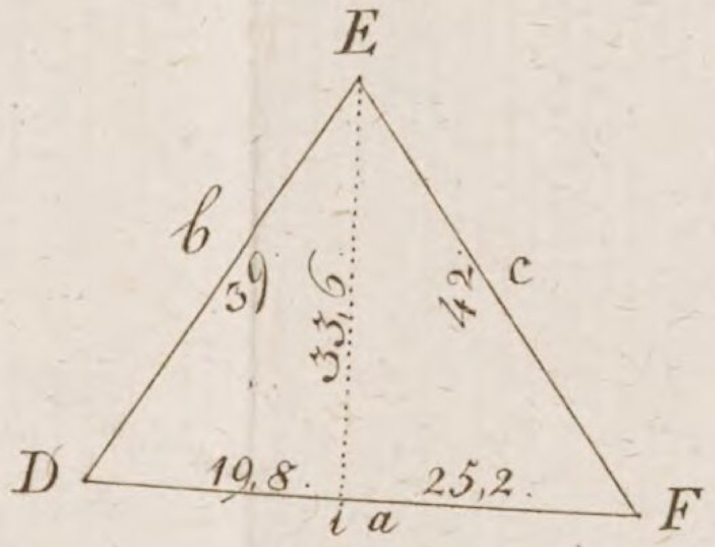


Fig. 169.

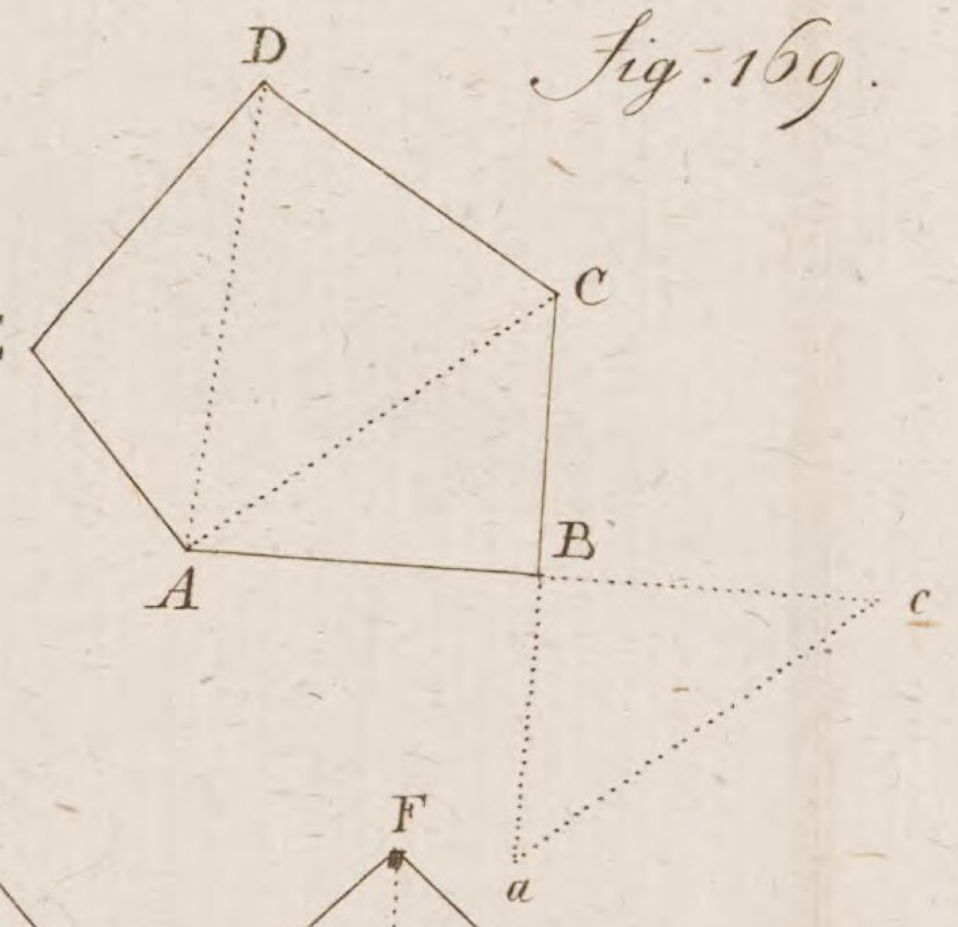
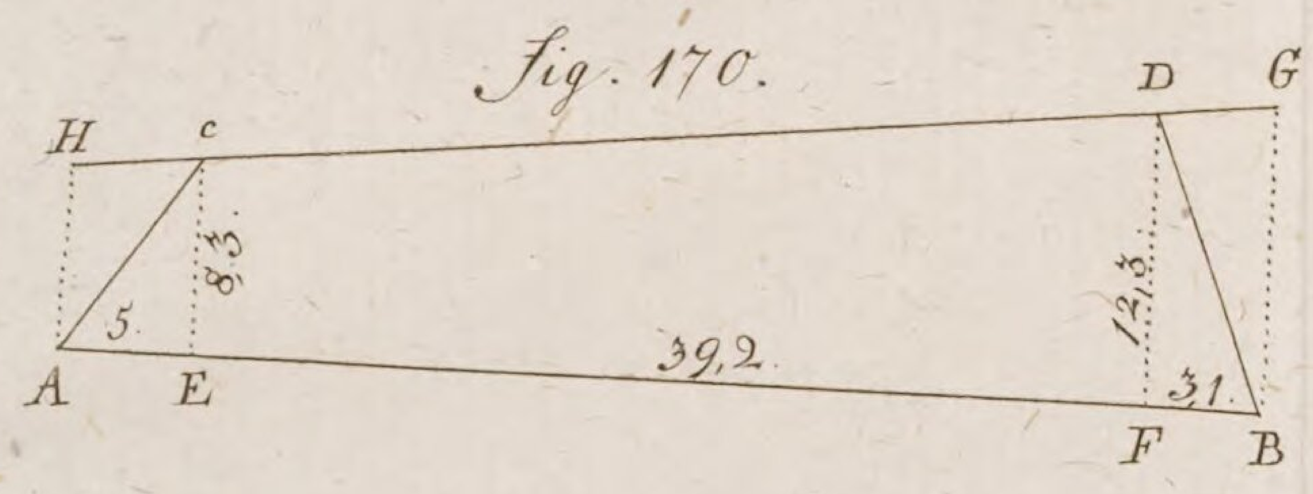


Fig. 170.



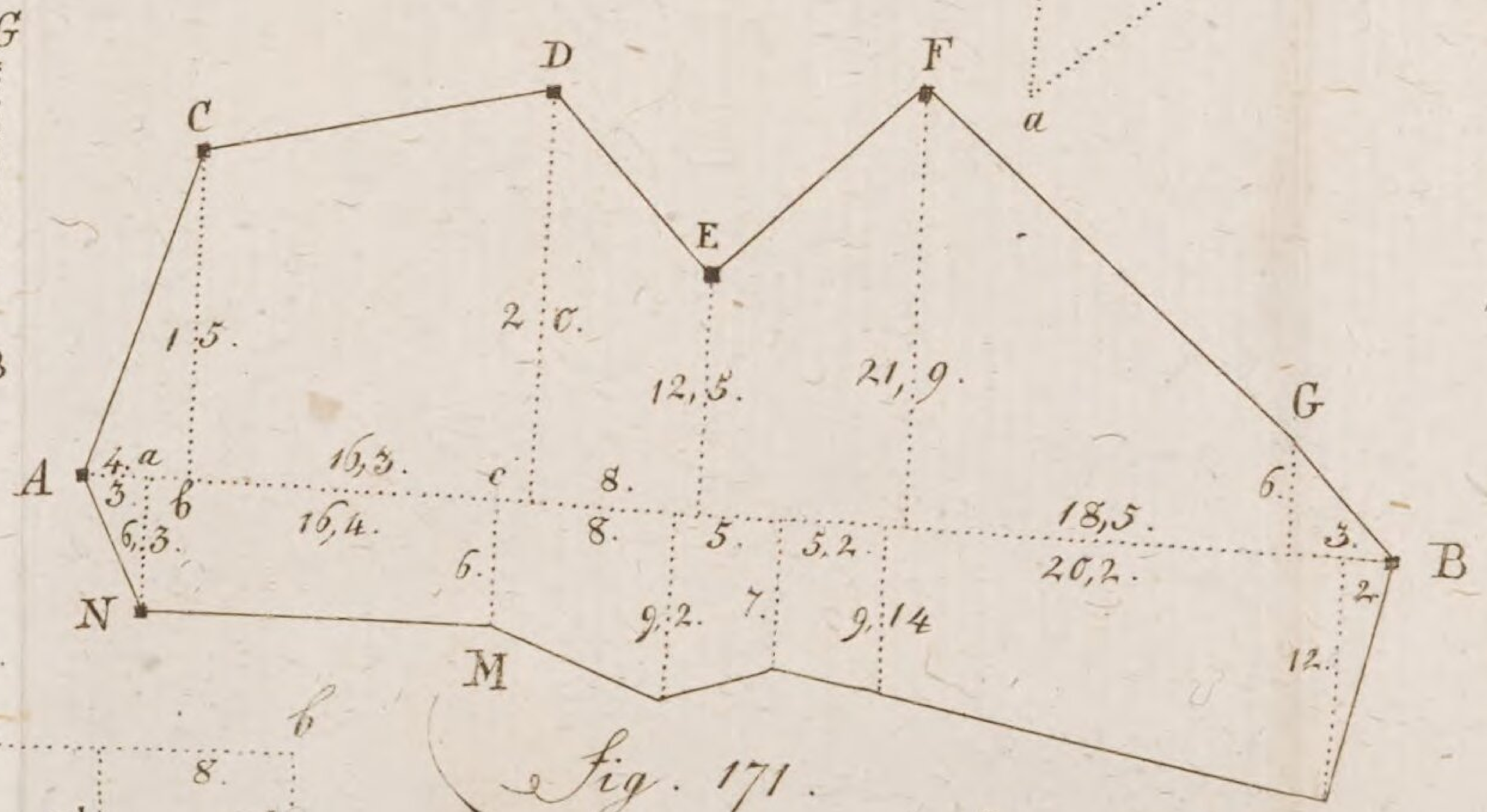


Fig. 171.

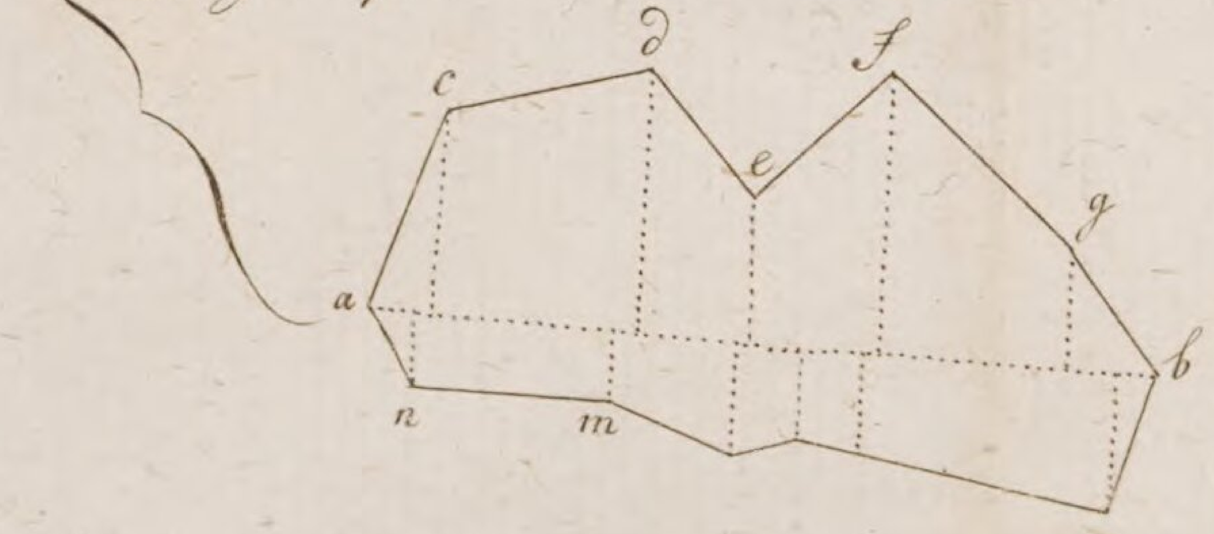


Fig. 172.

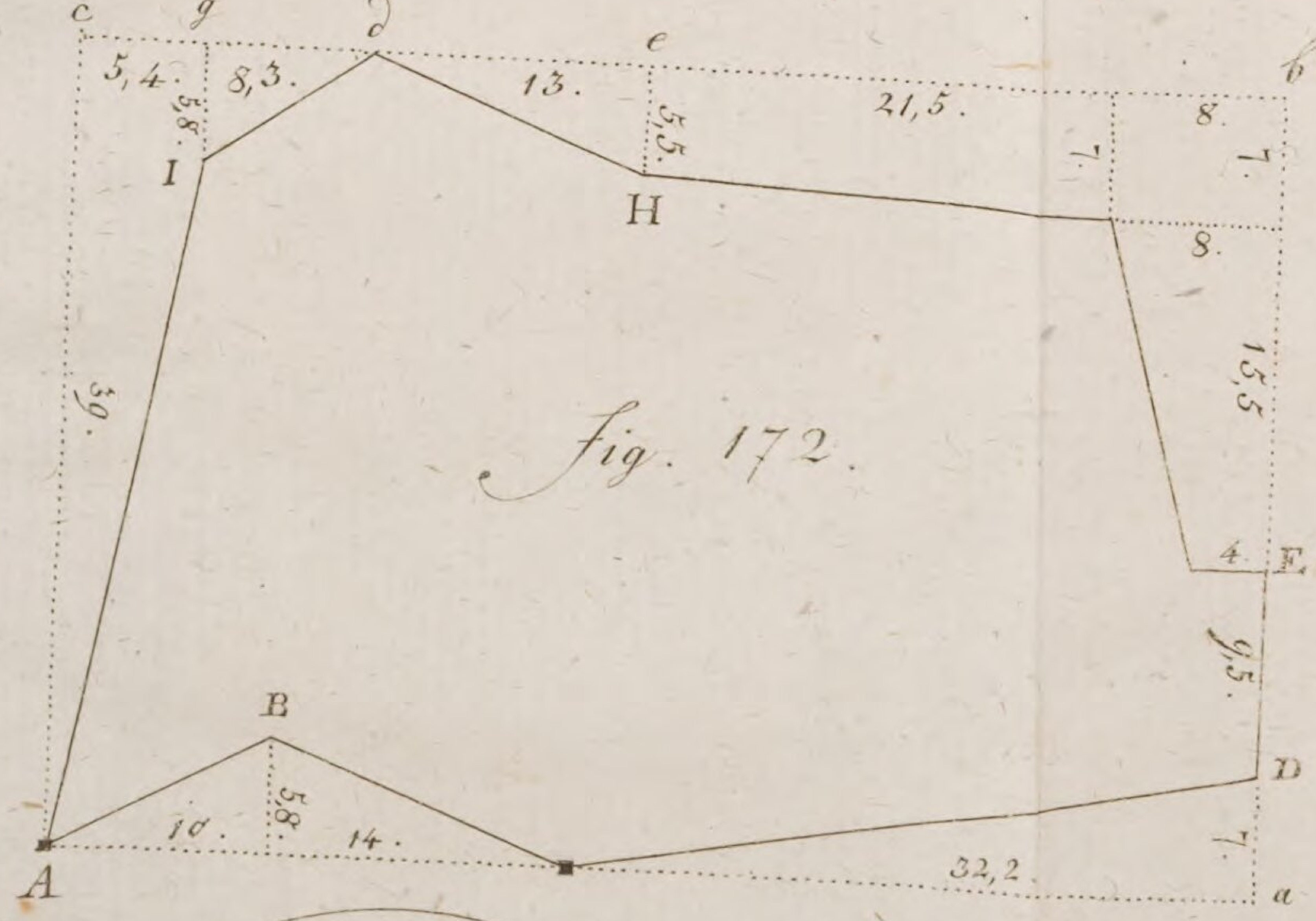
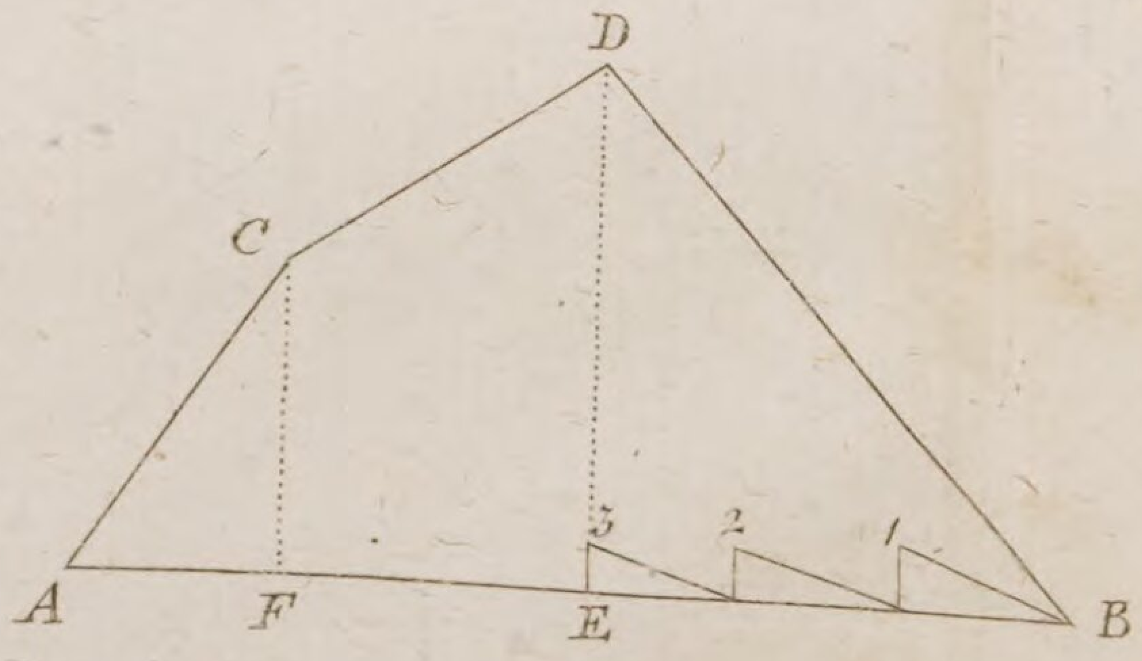


Fig. 173.



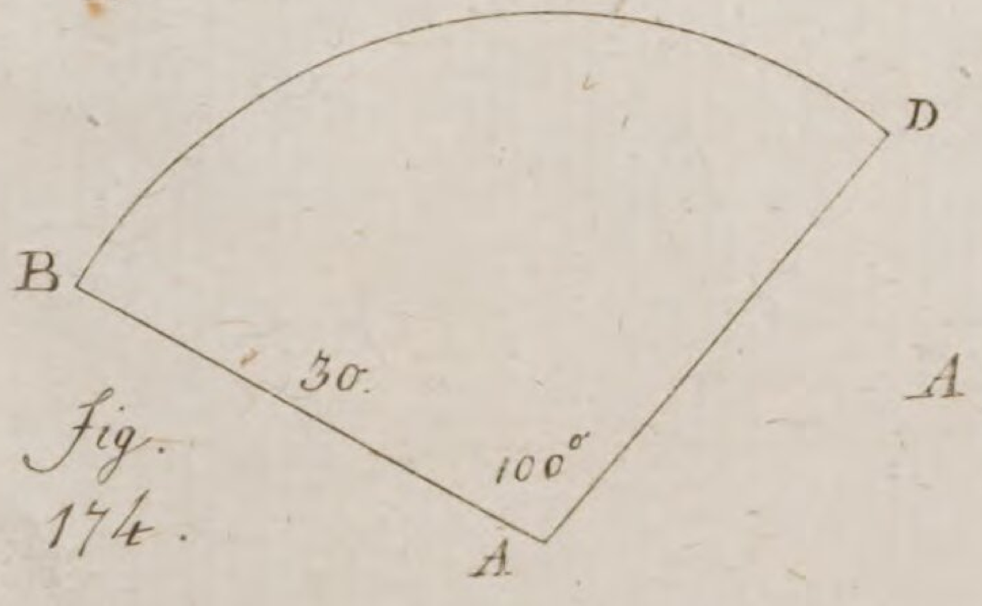


Fig. 174.

Fig. 175.

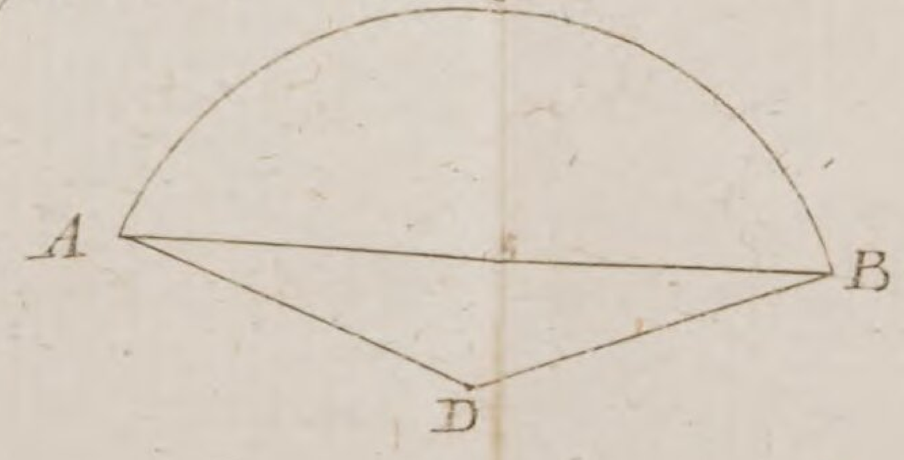


Fig. 176.

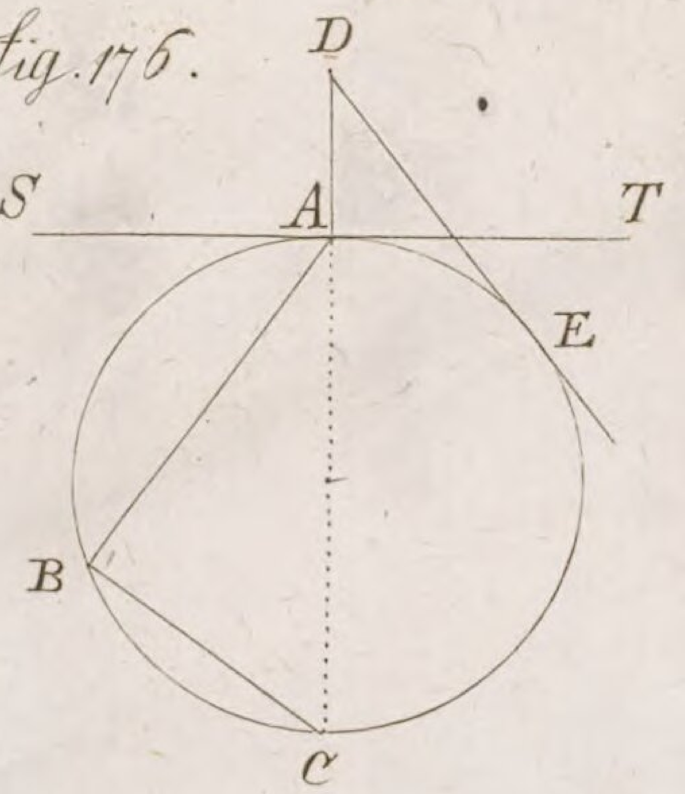


Fig. 177.

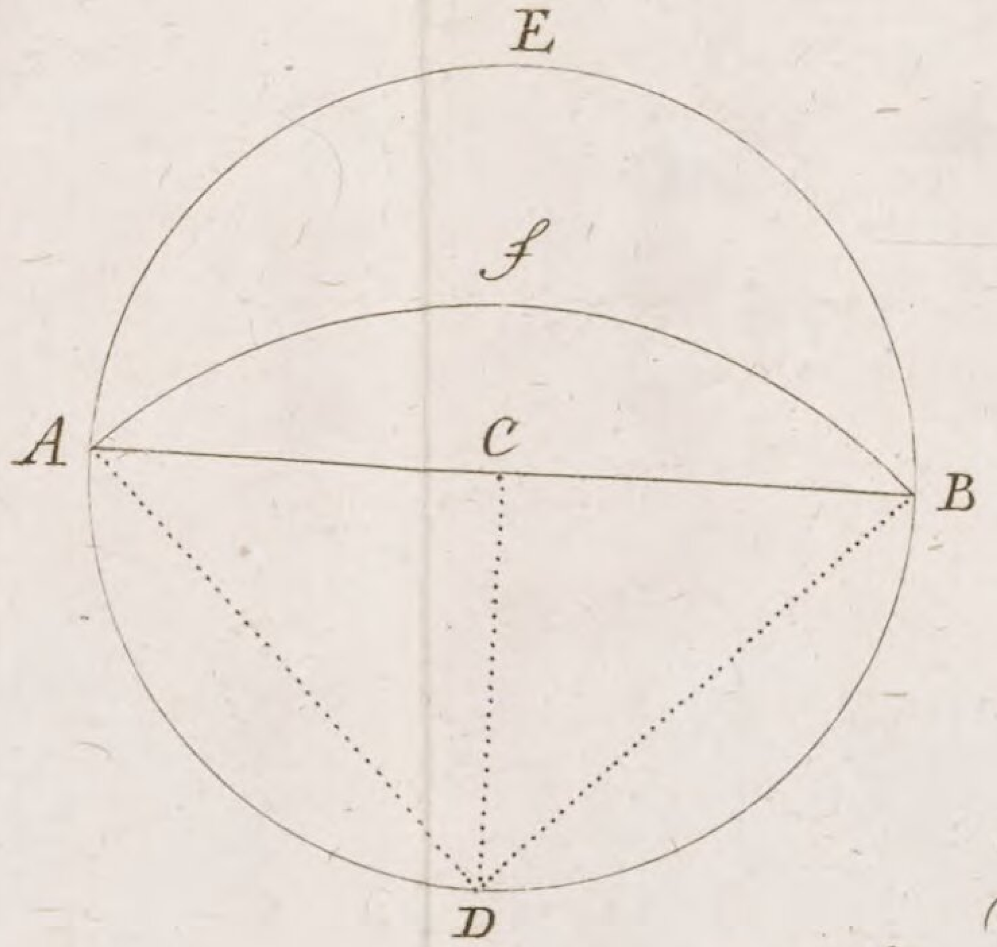


Fig. 178.

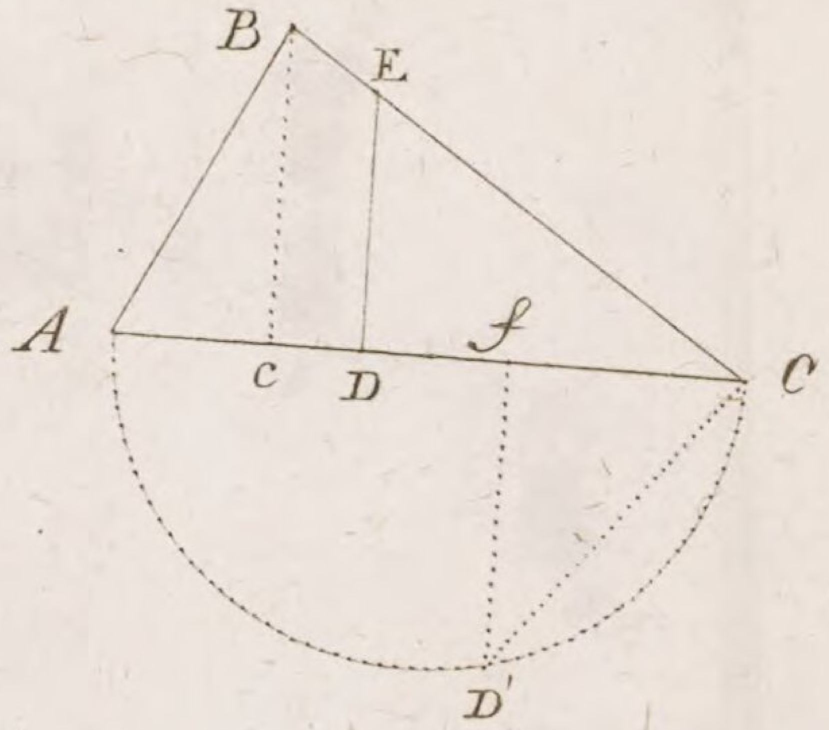


Fig. 179.

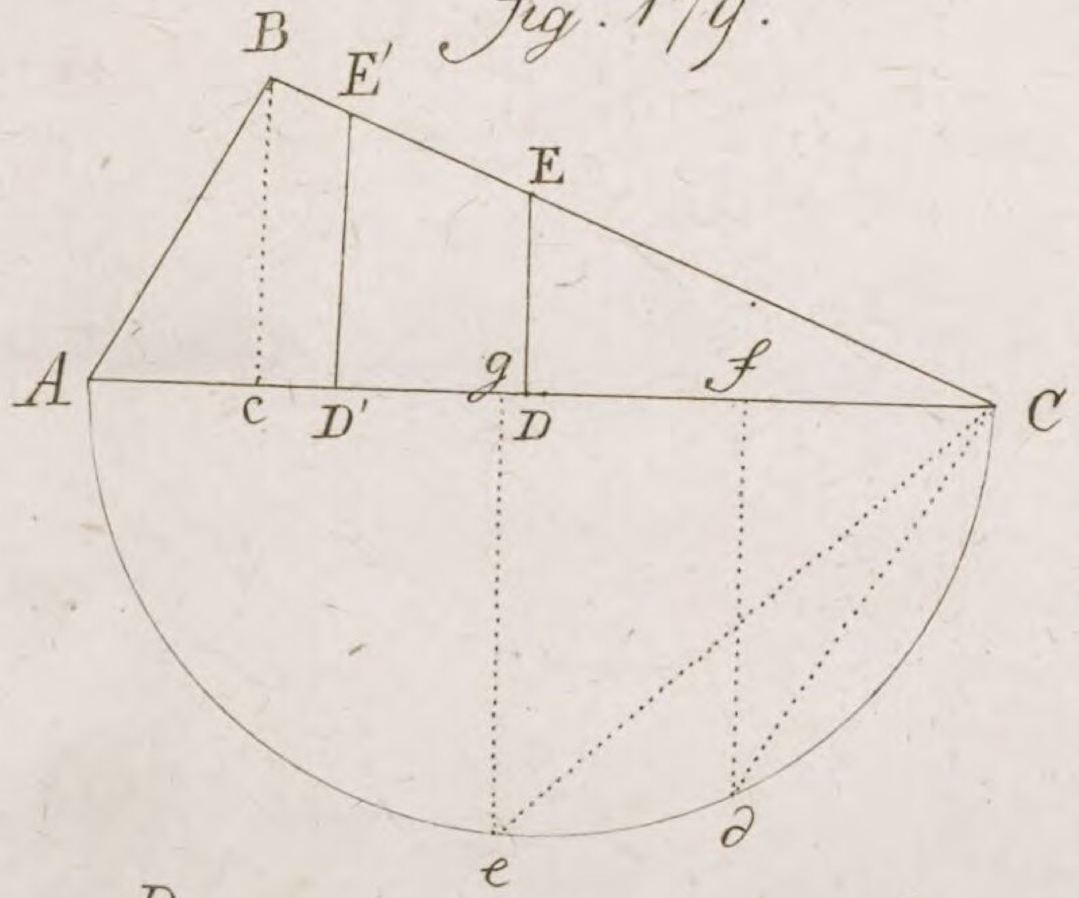


Fig. 180. 1te

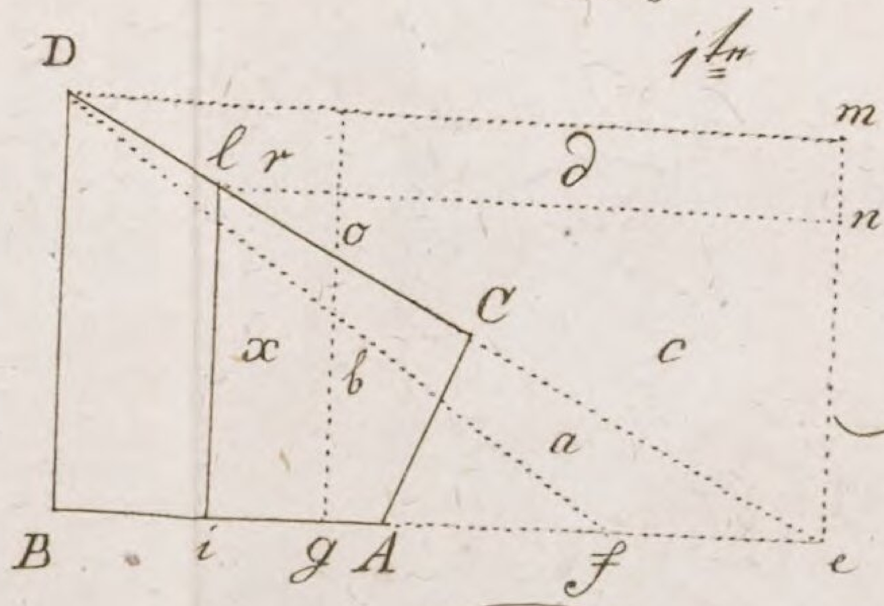


Fig. 180. 2te

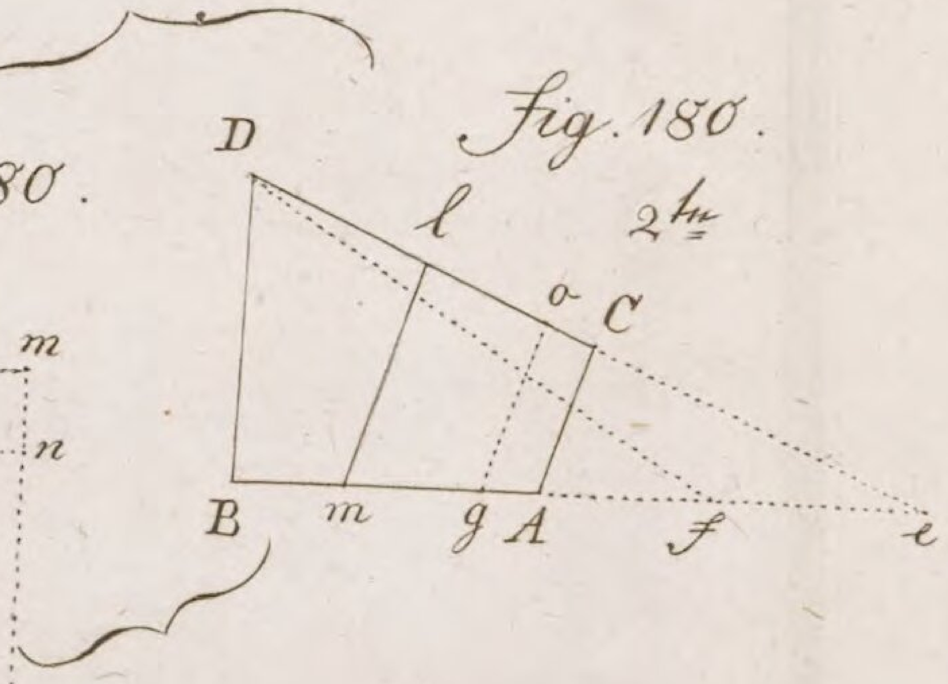


Fig. 181.

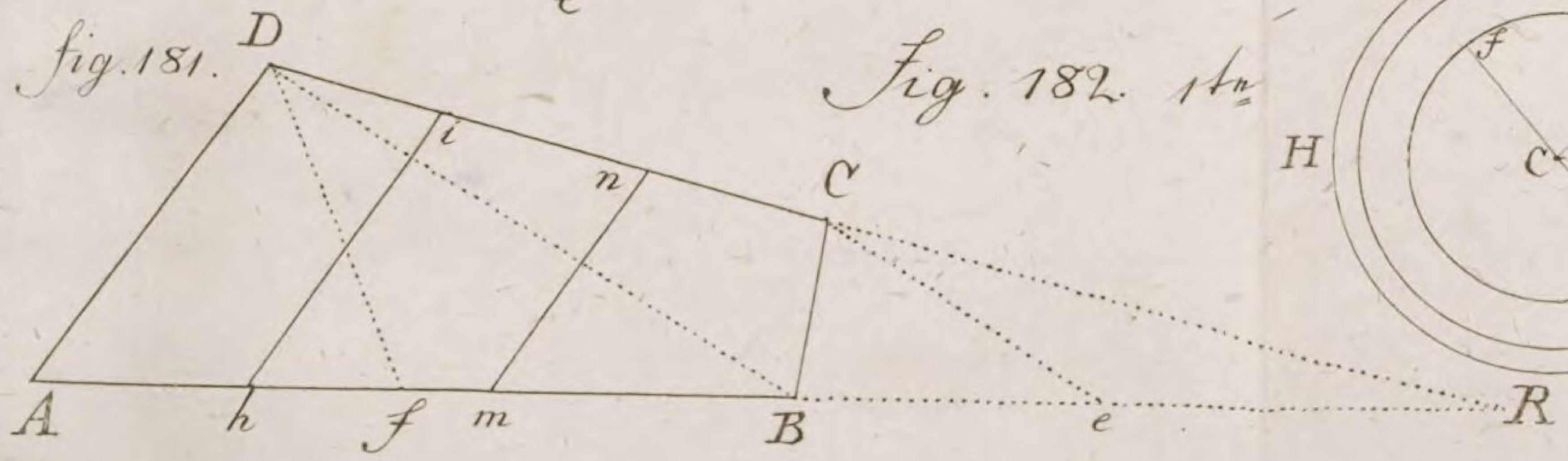


Fig. 182. 1te

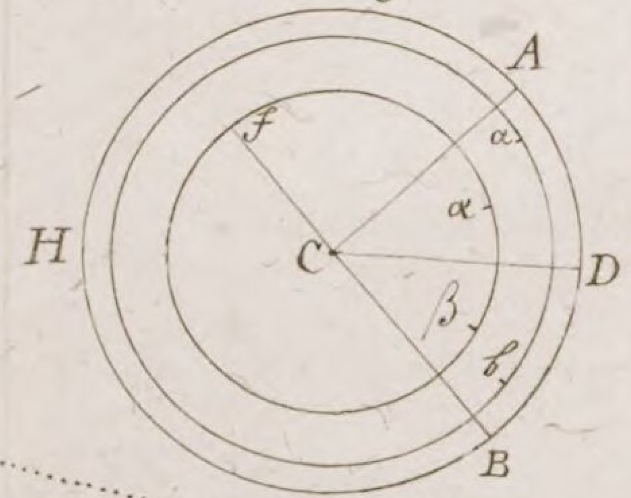


Fig. 182. 2te

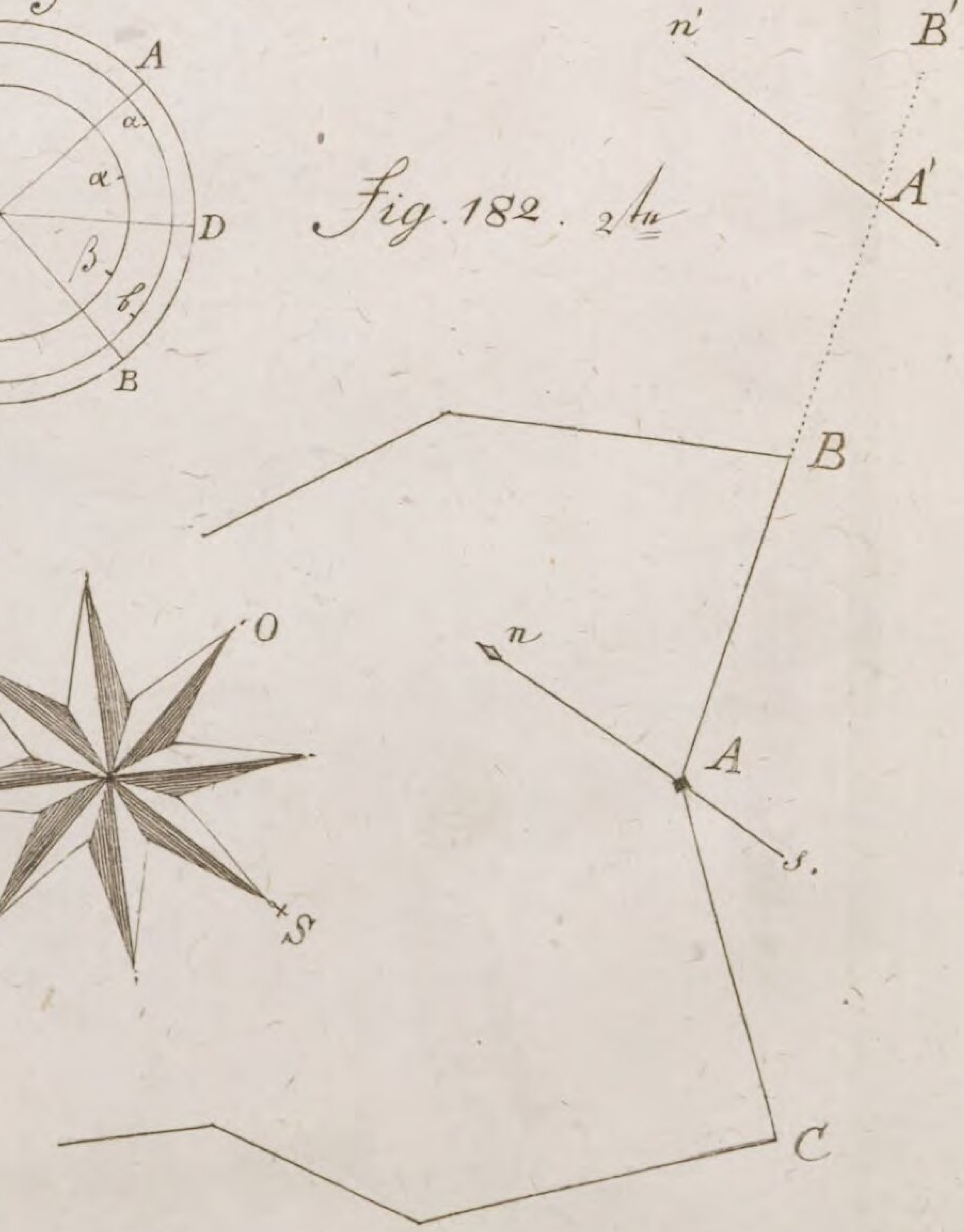


Fig. 183.

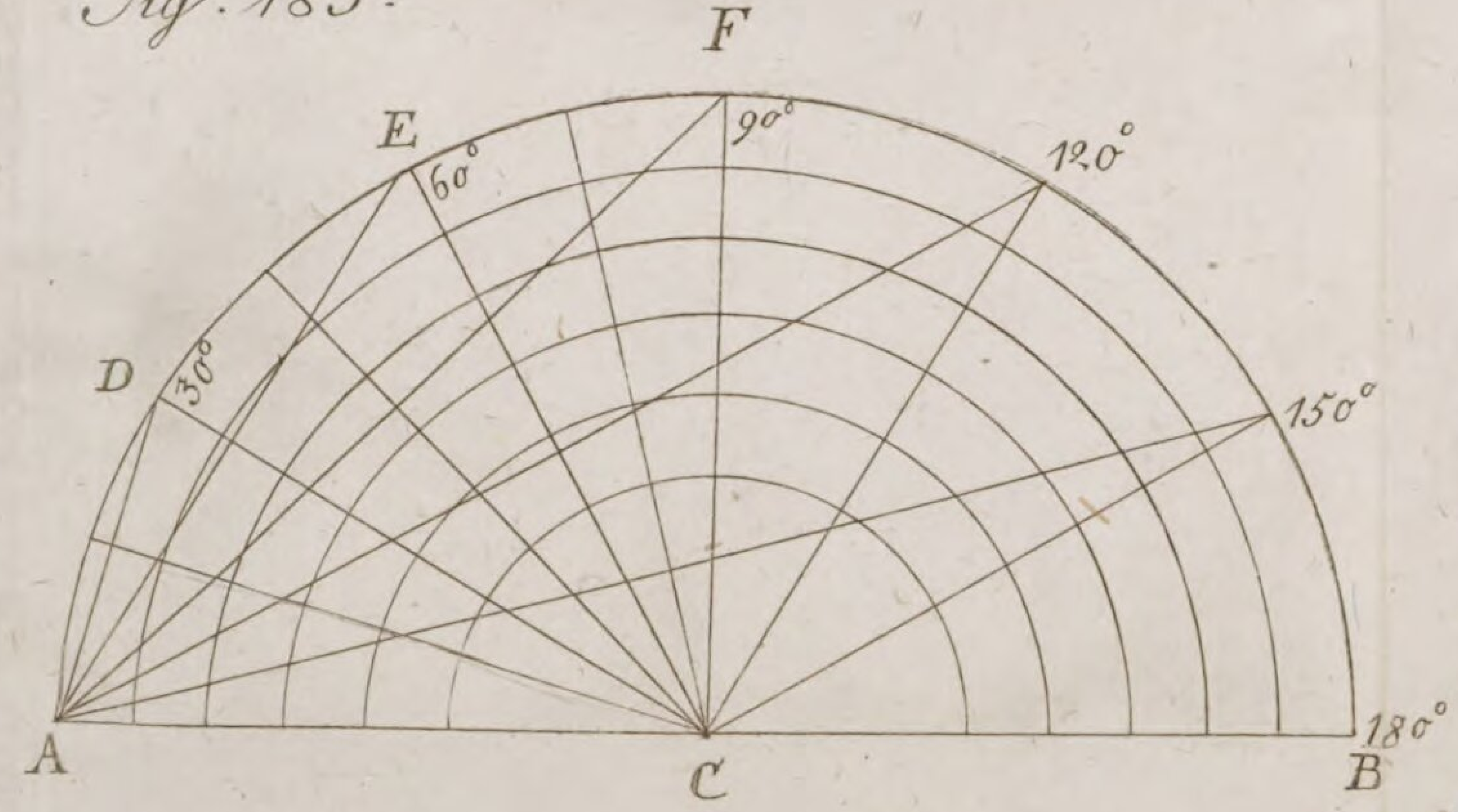


Fig. 184.

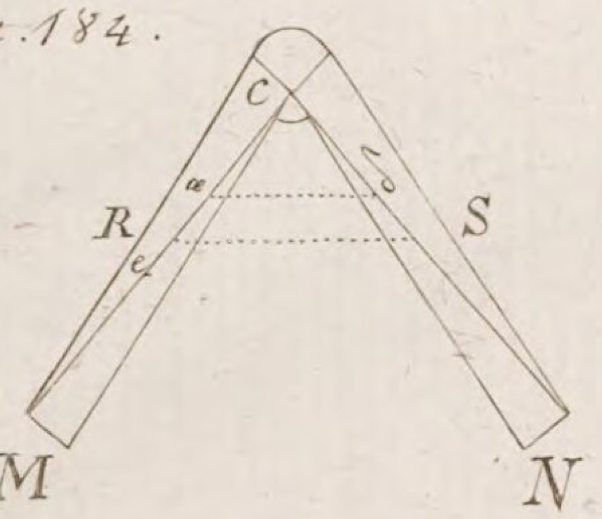


Fig. 185.

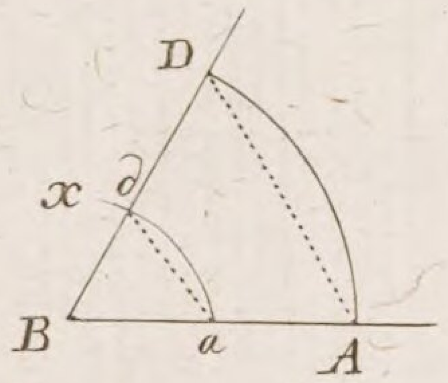


Fig. 187.

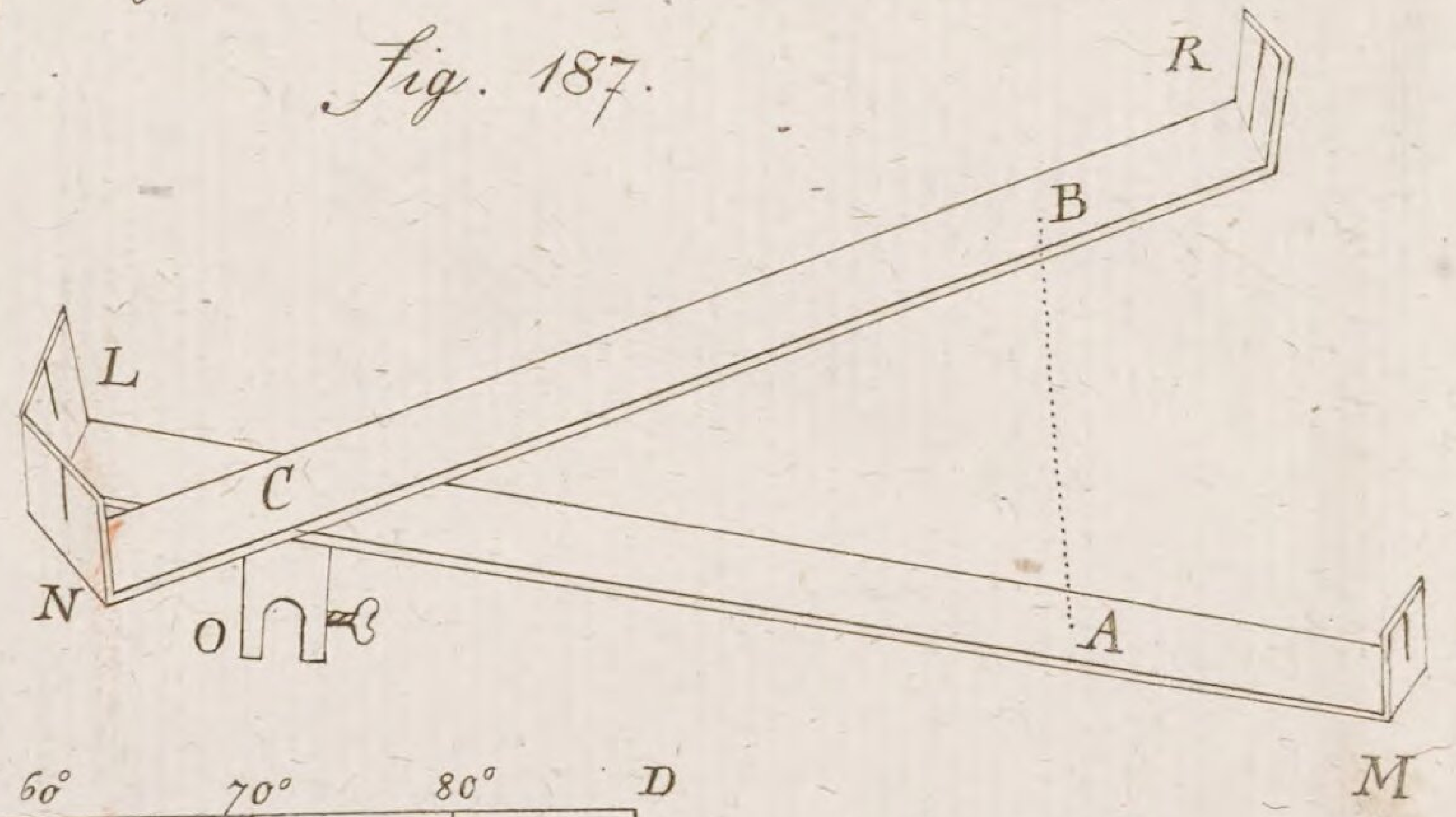


Fig. 186.

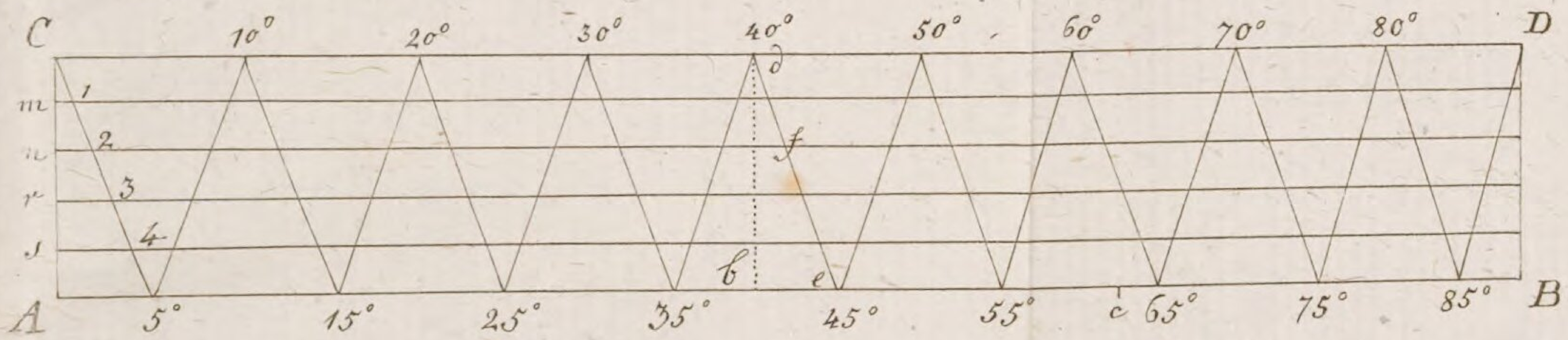


Fig. 188.

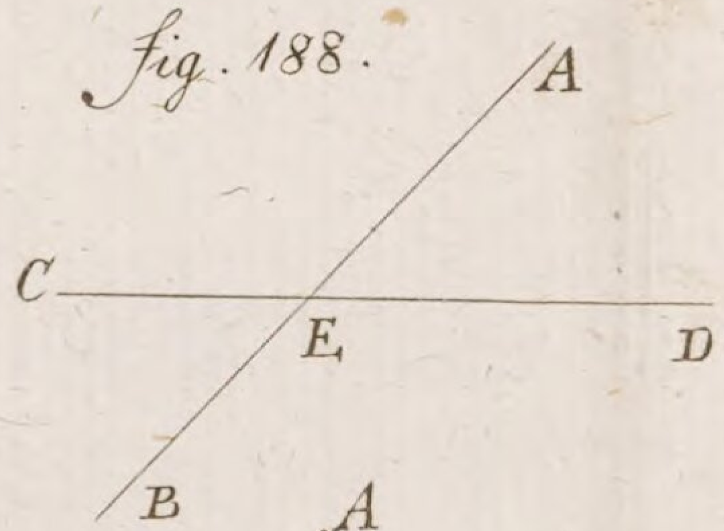


Fig. 189.

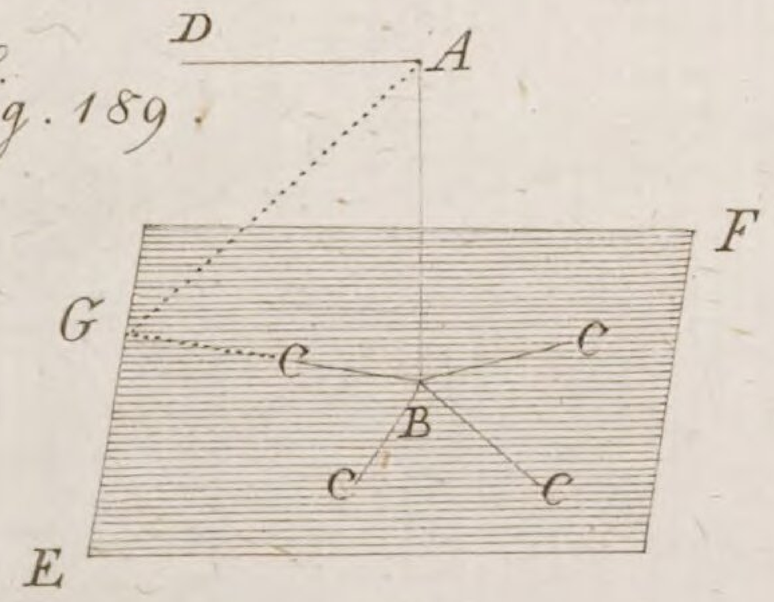


Fig. 190.

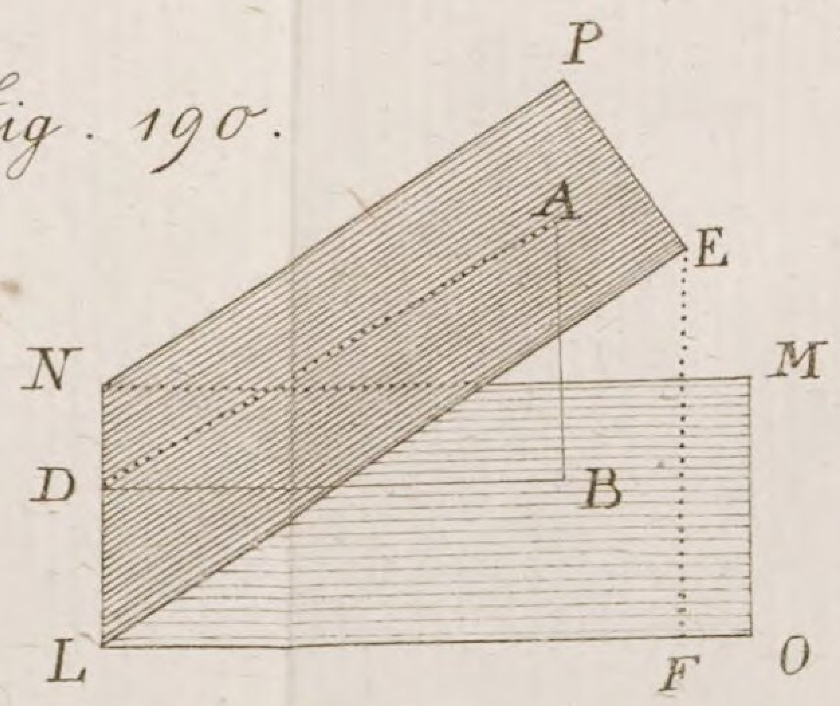


Fig. 191.

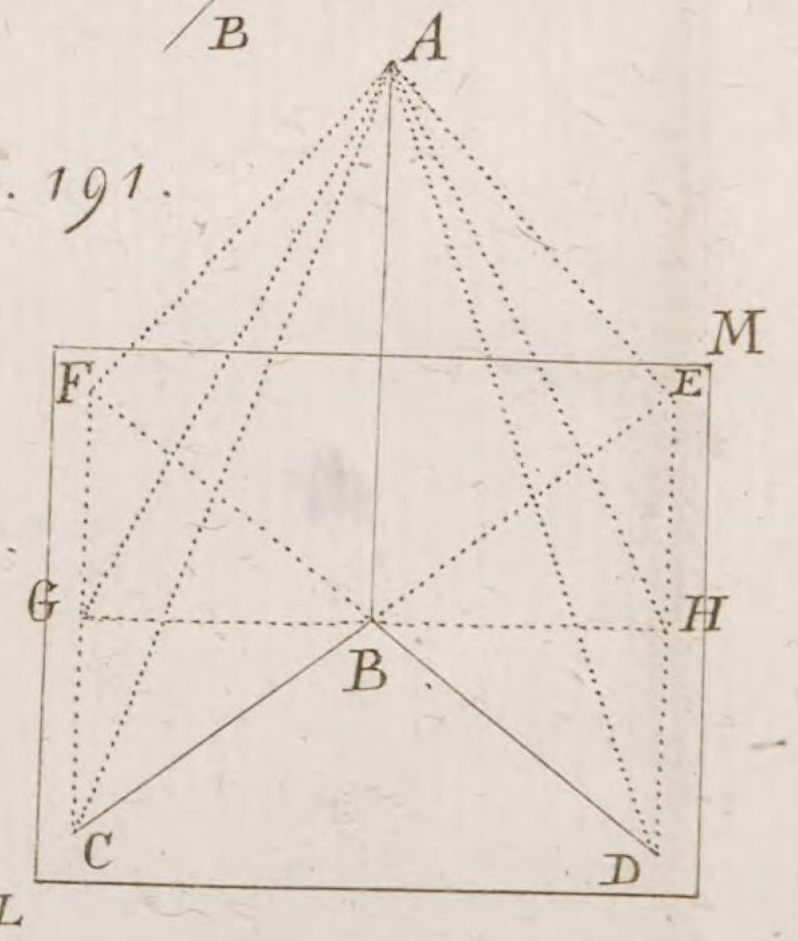


Fig. 192.

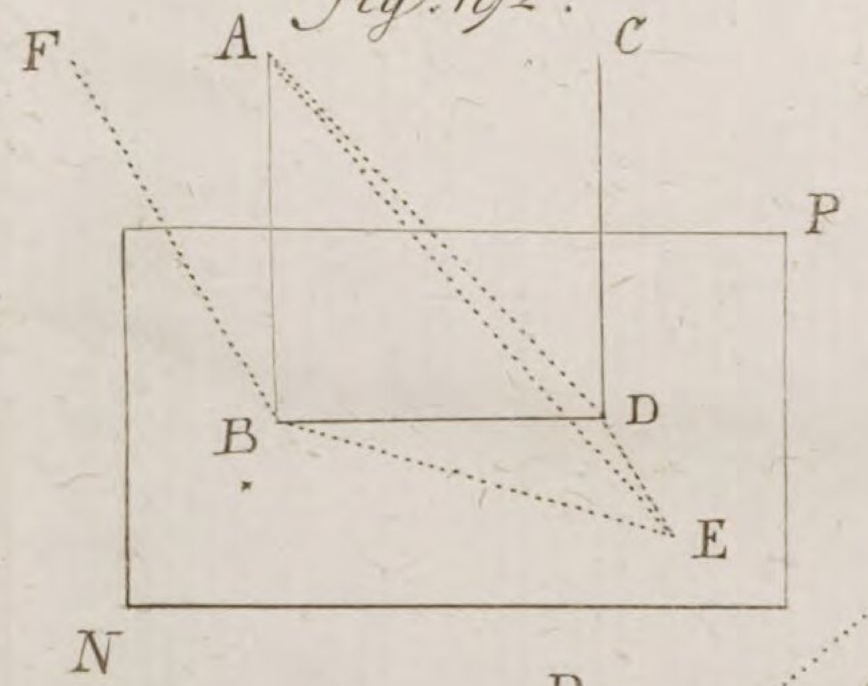


Fig. 193.

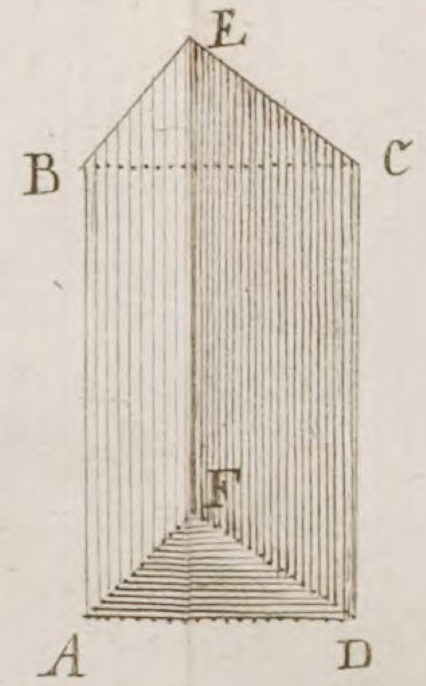


Fig. 194.

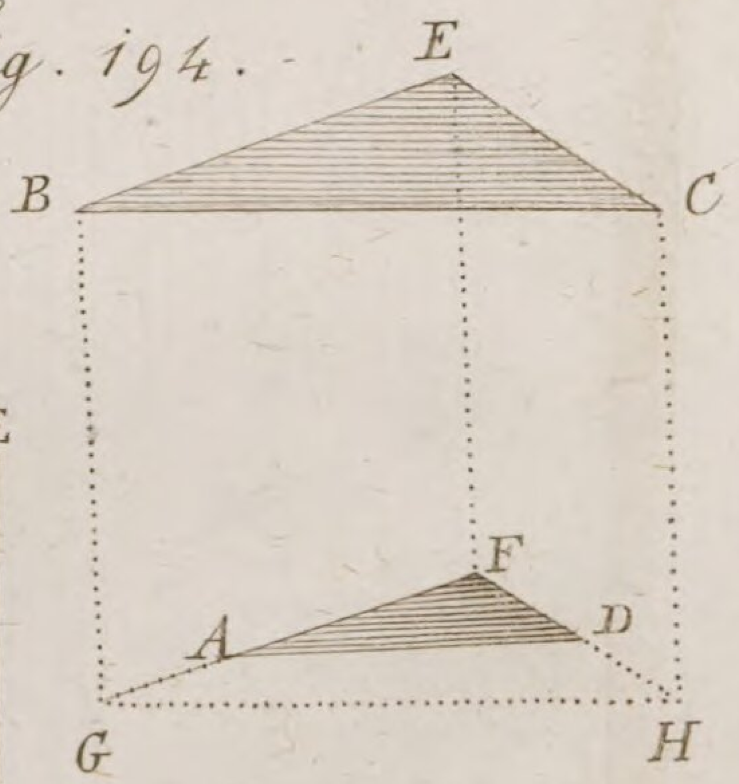


Fig. 195.

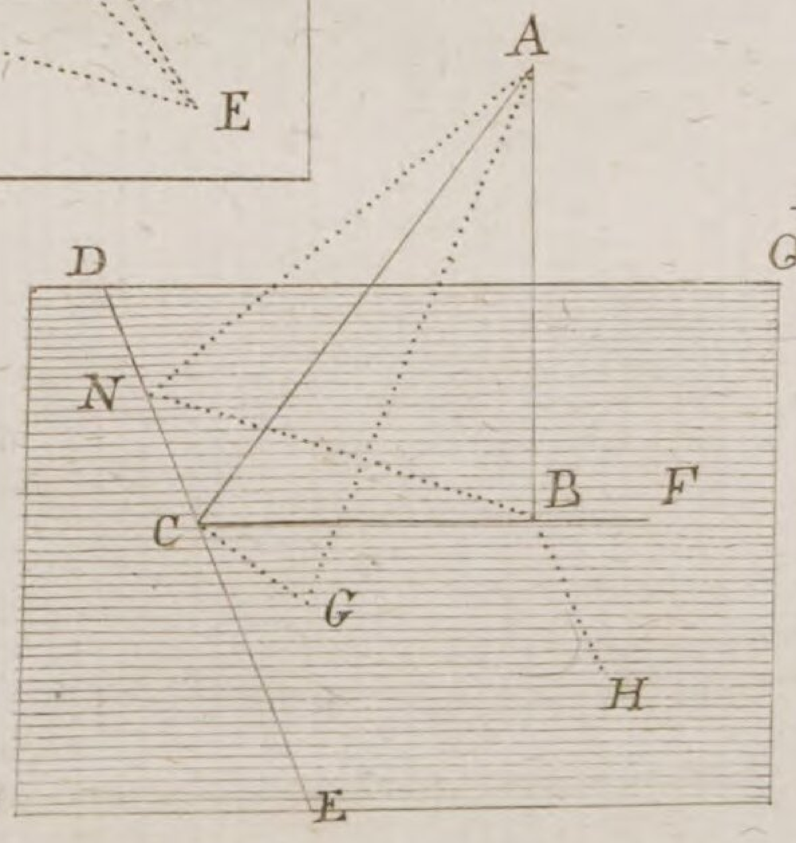


Fig. 196.

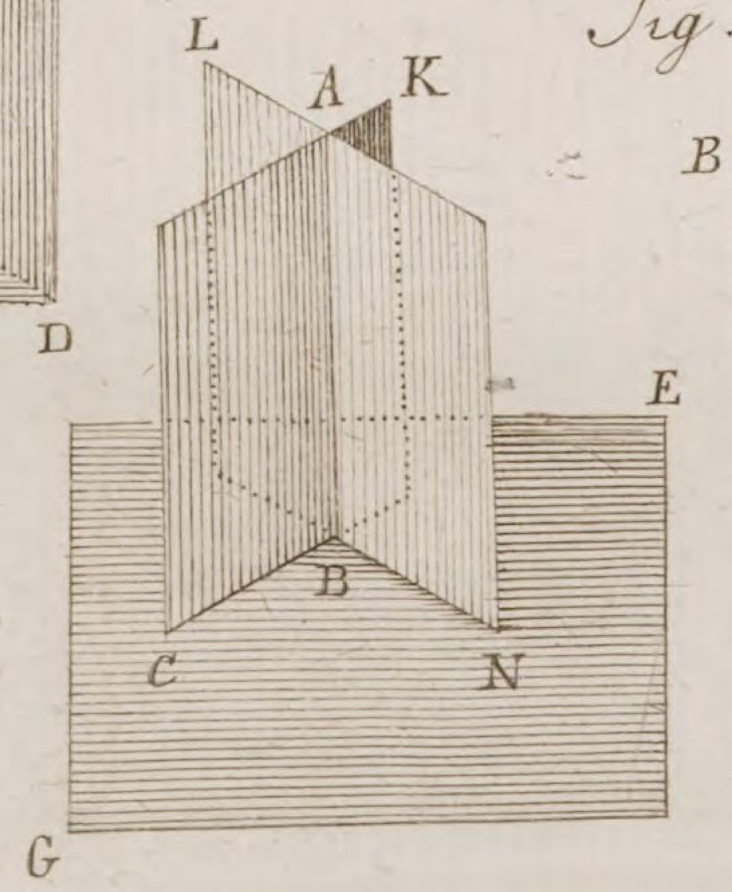


Fig. 197. à 206. Schoen's Geometrie Tab. XVIII.

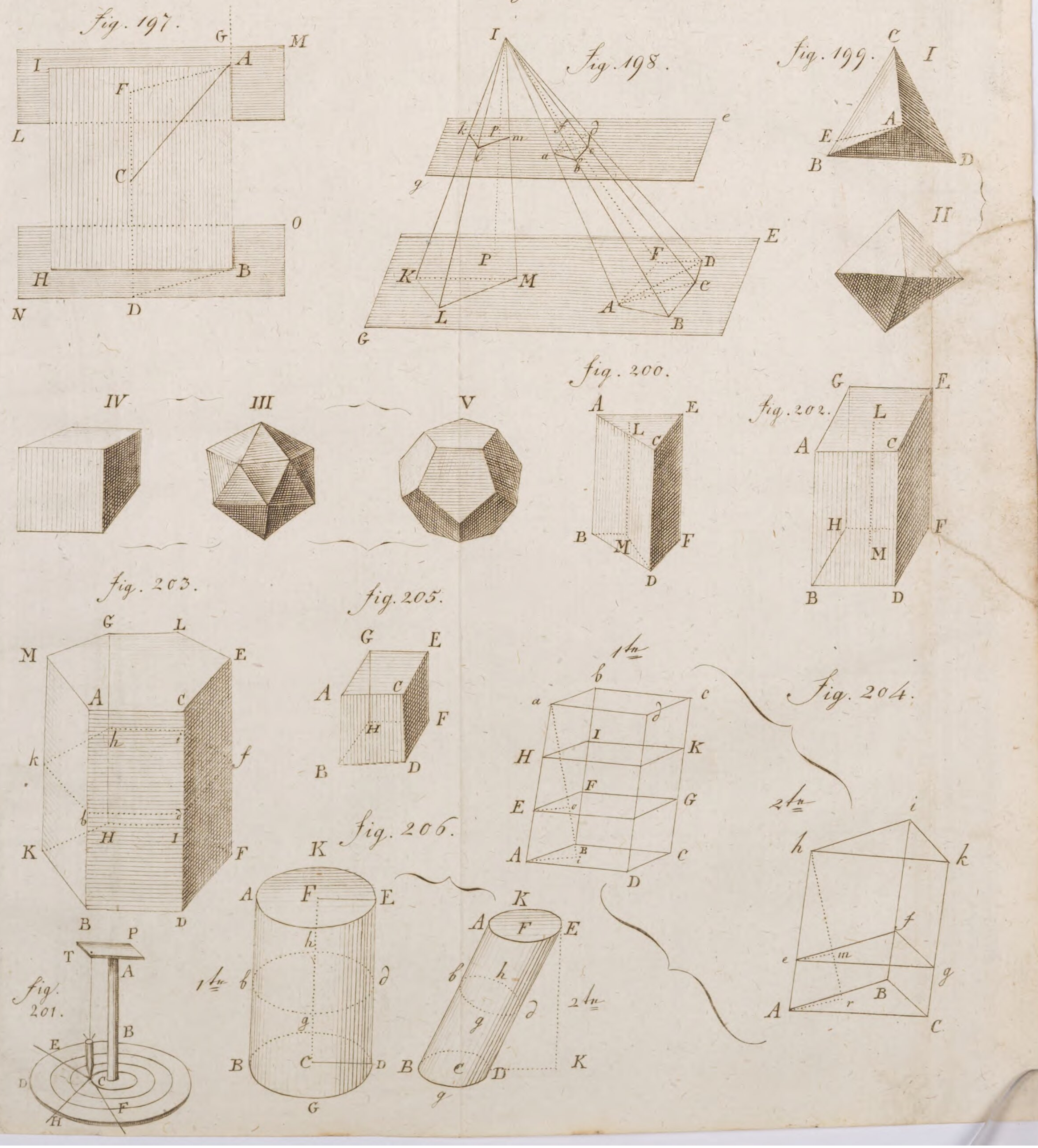
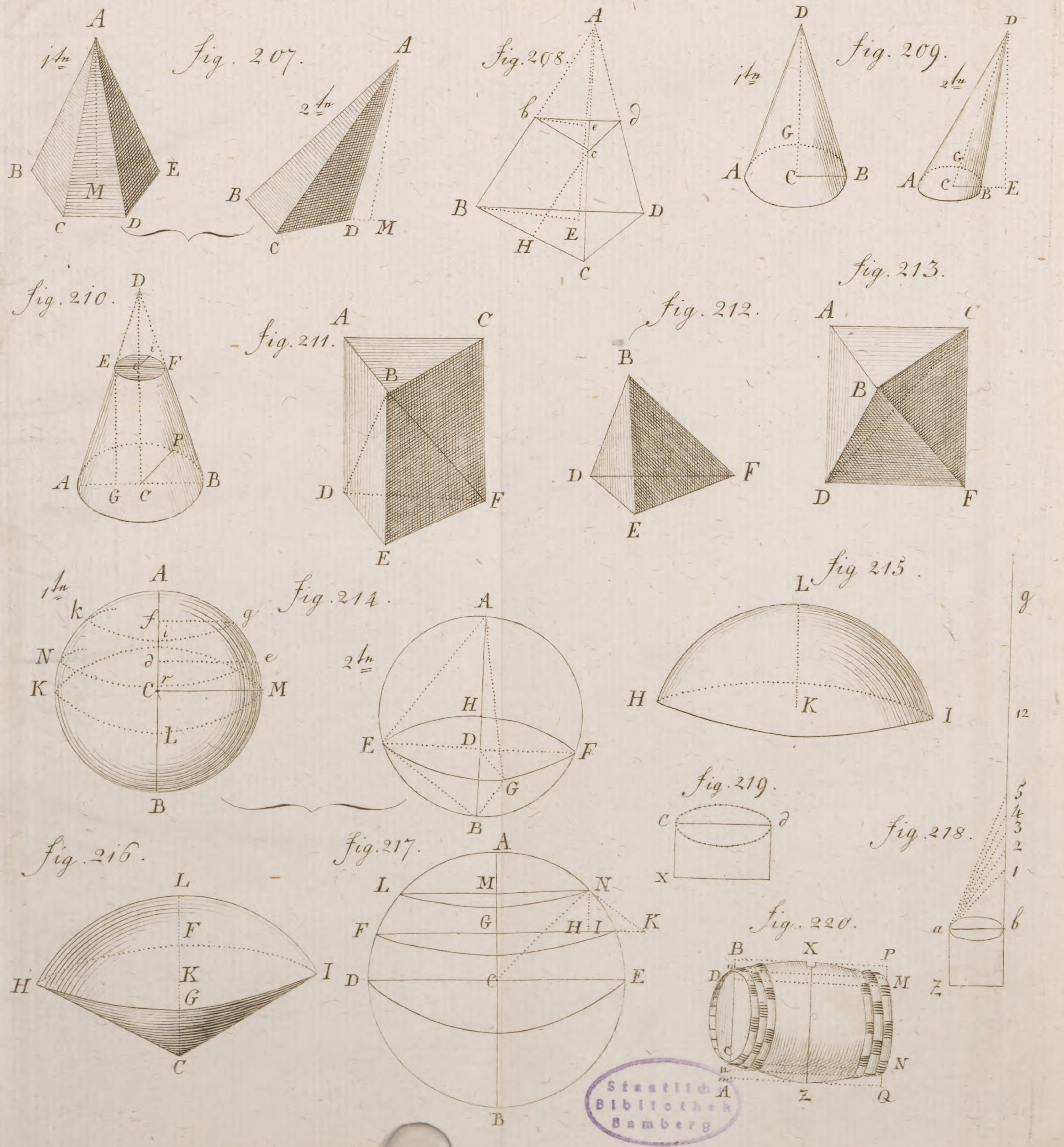


Fig. 207. à 220. Schoen's Geometrie Tab. XIX.



Staatliche Bibliothek Bamberg

Tafel XII fehlt!

Mit 1 Beil., wohl als Ersatz dafür (liegt zwischen S. 136 u. 137)

Buchwert

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann

Lehrbuch der reinen niedern Geometrie in Verbindung mit der Anleitung zur Feldmeßkunst

Nürnberg 1808

Bamberg, Staatsbibliothek -- AGB P 29
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11421418-6